DEVOIR LIBRE 6

Exercice 1

Partie I : calcul matriciel

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le polynôme caractéristique de A ?

2. En déduire les valeur propres de A. Donner les sous-espaces propres associés.

3. Montrer qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $D = Q^{-1}AQ$, avec Q de première ligne constituée de 1. On explicitera ces deux matrices.

4. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : étude d'une expérience

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées. On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :

à l'étape 1, on lance les deux pièces,
à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.
On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :

A_n : "obtenir 0 Pile à l'étape n",
B_n : "obtenir 1 Pile à l'étape n",
C_n : "obtenir 2 Piles à l'étape n",

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = MX_n$.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n, b_n et c_n.

5. Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elle.

Exercice 2
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie 3 rapporté à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$; les coordonnées d'un vecteur dans cette base sont notées (x, y, z).
L'identité sur E, notée Id_E est l'application de E dans E définie par : $\forall x \in E$, $Id_E(x) = x$.
f est un endomorphisme de E et A est sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
${}^tA$ est la matrice transposée de la matrice A.
$\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices à une colonne et 3 lignes à coefficients réels.

1. **Préliminaires.**

   (a) Pourquoi la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base canonique (1) de $\mathbb{R}$ de la forme linéaire

   $$\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & xe_1 + ye_2 + ze_3 & \mapsto & ax + by + cz \end{array}$$

   est la matrice ligne $L = (a\ b\ c)$?

   (b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.

   i. Montrer que $\varphi \circ f$ est une forme linéaire sur E et que
   Ker(φ) est stable par f si et seulement si Ker $\varphi \subset$ Ker$(\varphi \circ f)$.

   ii. Montrer que Ker(φ) est stable par f si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

   iii. Montrer que Kerφ est stable par f si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $LA = \lambda L$, où L est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la forme linéaire φ.

   (c) Montrer qu'il existe un plan de E stable par f si et seulement si il existe une matrice colonne non nulle C, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et un scalaire λ tel que ${}^tAC = \lambda C$.

2. **Exemple numérique.**
   Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) **Recherche des sous-espaces vectoriels stables par f.**

   i. Montrer que 2 et 4 sont valeurs propres de A, puis déterminer les sous-espaces propres de A, de ${}^tA$.

   ii. Quelles sont les droites vectorielles de E stables par f ?

   iii. Déterminer les plans vectoriels de E stables par f ; on en donnera une équation cartésienne, ainsi qu'une base.

(b) **Etude de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$.**

i. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Reconnaître le sous espace vectoriel de E engendré par (e'_1, e'_2).

ii. Montrer que si f et g commutent alors Ker $(f - 2Id_E)$ et Ker$(f - 4Id_E)$ sont stables par g.

iii. Montrer que f et g commutent si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

iv. En déduire que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension trois et que

$$\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2).$$

Exercice 3

1. **Calculs préliminaires.**

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x).$$

(b) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

i. Montrer que f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$; on notera φ ce prolongement.

ii. Montrer que φ admet un développement en série entière autour de 0.

iii. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx.$$

(a) Montrer que I existe.

(b) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx.$$

i. Montrer, et justifier leur convergence, que

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx = 3 \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx.$$

ii. Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telle que :

$$I(a) = C \int_a^{3a} \varphi(x) dx + D$$

la fonction φ ayant été définie en 1.b.i.

iii. En déduire la valeur de I.