

## DEVOIR LIBRE 5 bis

**Notations.**

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on note  $|z|$  son module.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $n!$  la factorielle de  $n$  avec la convention  $0! = 1$ ,
- $\llbracket 0, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  vérifiant  $0 \leq k \leq n$ ,
- $\binom{n}{k}$  le nombre de parties ayant  $k$  élément d'un ensemble de  $n$  éléments, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

On rappelle :

- la valeur de  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,
- la formule du binôme : si  $z_1$  et  $z_2$  sont des nombres complexes et  $n$  un entier naturel, alors

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

- le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries. Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques convergeant absolument. On définit leur série produit de Cauchy par  $\sum w_n$  avec, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{l=0}^n u_{n-l} v_l$ . Cette série est alors absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Enfin, si  $n$  est un entier naturel non nul, on note  $\sigma_n$  la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  et on pose  $\sigma_0 = 0$ .

**Objectifs.**

Dans les parties I et II, on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier à une fonction  $\phi$  à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

**Etude d'un procédé de sommation**

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes.

Toute application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$  étant une suite complexe, si  $a$  est une telle suite, on utilise la notation usuelle  $a(n) = a_n$ .

A toute suite complexe  $a$ , on associe la suite  $a^*$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  aux propriétés de la série

$$\sum_{n \geq 0} a_n.$$

## Partie I : deux exemples.

### I.1. Cas d'une suite constante.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  ; on suppose que la suite  $a$  est définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha$ .

I.1.1. Expliciter  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

I.1.2. Expliciter  $a_n^*$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

I.1.3. La série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  (resp.  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ ) est-elle convergente ?

### I.2. Cas d'une suite géométrique.

Soit  $z \in \mathbb{C}$  ; on suppose que la suite  $a$  est définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = z^n$ .

I.2.1. Exprimer  $a_n^*$  en fonction de  $z$  et  $n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

I.2.2. On suppose que  $|z| < 1$ .

I.2.2.1. Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et expliciter sa somme  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

I.2.2.2. Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  et expliciter sa somme  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$  en fonction de  $A(z)$ .

I.2.3. On suppose que  $|z| \geq 1$ .

I.2.3.1. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  ?

I.2.3.2. Quelle est la nature de  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  si  $z = -2$  ?

I.2.3.3. On suppose  $z = e^{i\theta}$ , avec  $\theta$  réel tel que  $0 < |\theta| < \pi$ .

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ .

## Partie II : étude du procédé de sommation.

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que  $a$  est à valeurs réelles.

### II.1. Comparaison des convergences des deux suites.

II.1.1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère un entier  $k$  fixé,  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

II.1.1.1. Préciser un équivalent de  $\binom{n}{k}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

II.1.1.2. En déduire la limite de  $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

II.1.2. Soit  $a$  une suite réelle et  $q$  un entier naturel fixé.

On considère pour  $n > q$  la somme  $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$ . Quelle est la limite de  $S_q(n, a)$  lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

II.1.3. On suppose que  $a_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que  $a_n^*$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

II.1.4. On suppose que  $a_n$  tend vers  $l$  (limite finie) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Quelle est la limite de  $a_n^*$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

II.1.5. La convergence de la suite  $(a_n)$  est-elle équivalente à la convergence de la suite  $(a_n^*)$  ?

II.2. **Comparaison des convergences des séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_n^*$ .**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$ ,  $U_n = 2^n T_n$ .

II.2.1. Pour  $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , exprimer  $U_n$  comme combinaison linéaire des sommes  $S_k$ , c'est à dire sous la forme  $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k$ .

II.2.2. On se propose de déterminer l'expression explicite de  $U_n$  comme combinaison linéaire des sommes  $S_k$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

II.2.2.1. A quelle expression des coefficients  $\lambda_{n,k}$  (en fonction de  $n$  et  $k$ ) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question II.2.1 ?

II.2.2.2. Etablir la formule  $(\mathcal{E})$  par récurrence sur l'entier  $n$  (on pourra remarquer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = S_k - S_{k-1}$  avec la convention  $S_{-1} = 0$ ).

II.2.3. On suppose que la série  $\sum a_n$  est convergente. Montrer que la série  $\sum a_n^*$  est convergente et exprimer la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$  en fonction de la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

II.2.4. La convergence de la série  $\sum a_n$  est-elle équivalente à la convergence de la série  $\sum a_n^*$  ?

### Partie III : une étude de fonctions.

On rappelle que :  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma_0 = 0$ .

Pour  $x$  réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} ; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} ; \quad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$$

#### III.1. Etude de $f$ .

III.1.1. Vérifier que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

III.1.2. Expliciter  $xf(x)$  pour tout  $x$  réel.

III.1.3. Expliciter  $e^{-x}f(x)$  pour tout  $x$  réel.

#### III.2. Etude de $g$ .

III.2.1. Montrer que  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

III.2.2. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Exprimer  $g' - g$  en fonction de  $f$ .

III.2.3. Montrer que pour tout  $x$  réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

**III.3. La fonction  $F$ .**

On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

III.3.1. En reprenant la question III.1.3. montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n!)} x^n.$$

III.3.2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{kk!(n-k)!}$ . Exprimer  $\gamma_n$  en fonction de  $n$  et  $\sigma_n$ . On admettra que si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = b_n$ .

**III.4. La série  $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\ln(n)$  le logarithme népérien de  $n$ .

III.4.1. Soit  $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

III.4.1.1. Montrer que la série  $\sum_{k \geq 1} w_k$  est convergente.

III.4.1.2. En déduire que la suite de terme général  $\sigma_n - \ln(n)$  admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

III.4.2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\tau_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ . Exprimer  $\tau_{2n}$  en fonction de  $\sigma_{2n}$  et  $\sigma_n$ .

III.4.3. Montrer en utilisant III.4.1 et III.4.2 que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  est convergente et déterminer

sa somme  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

**III.5. Etude de la fonction  $\phi$ .**

III.5.1. Montrer que  $\phi$  est définie sur  $] -1, 1[$ .

III.5.2. **Valeur de  $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ .**

En utilisant les résultats de la partie II de la question III.3.2. et de la question III.4.3 expliciter la valeur de  $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ .

III.5.3. Montrer que  $\phi(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$  pour  $x \in ] -1, 1[$  et retrouver la valeur de  $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ .