DEVOIR LIBRE 5

Problème 1
Soit n un entier naturel. On dispose de $n+1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$.
Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_j$ contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j.
On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant.

- Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_n$.
- A l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j ($j \in [\![0, n]\!]$), le second tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$.
- On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout entier naturel k non nul, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

Pour tout entier naturel non nul k, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne n, on pose $X_0 = n$.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Pour tout entier naturel k, on considère la matrice W_k de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel k, on note $E(X_k)$ et $V(X_k)$ respectivement, l'espérance et la variance de X_k.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, écrire $P(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $P(X_k = i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.
   (b) En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$.
2. (a) Déterminer la matrice ligne $B \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = E(X_k)$.
   (b) Calculer BA en fonction de B.
   (c) Exprimer pour tout entier naturel k, $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$.
   (d) En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de n et de $k \in \mathbb{N}$.
3. (a) Déterminer la matrice ligne C de $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $CW_k = E(X_k^2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Calculer le produit CA en fonction de B et C.
   (c) Pour tout entier naturel k, exprimer $E(X_{k+1}^2)$ en fonction de $E(X_k^2)$ et $E(X_k)$.
4. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = E(X_k^2) - \frac{n}{2^k}$.
   (a) Vérifier que la suite (u_k) est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de $E(X_k^2)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et de n.
   (c) Exprimer $V(X_k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et n.

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et on rappelle que la base canonique de cet espace est $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \cdots, e_n)$ où, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, la fonction e_j est définie par $e_j(x) = x^j$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit f l'application qui, à une fonction polynôme S de $\mathbb{R}_n[x]$, associe la fonction $Q = f(S)$ définie par :

$$Q(x) = f(S)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)} \int_1^x S(t)dt & \text{si} \quad x \neq 1 \\ S(1) & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}.$$

5. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
6. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on définit la fonction polynomiale q_j par $q_j(x) = (x-1)^j$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Donner la matrice D représentative de f dans $\mathcal{B}'$.
   (c) Donner la matrice de passage T de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
   (d) Déterminer l'inverse de T.
   (e) Ecrire pour tout entier naturel k, la dernière colonne de la matrice A^k.
7. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la loi de X_k est donnée par :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(X_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \frac{1}{(j+i+1)^k}.$$

   (b) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\lim_{k \to +\infty} P(X_k = j)$. Interpréter l'issue asymptotique des tirages.

Problème 2
Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}.$$

Le but de l'exercice est d'étudier les modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ puis d'en étudier sa somme que l'on notera f.

I. Résultat préliminaire.

1. Une inégalité classique.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$.
2. En déduire que pour tout réel $u > 0$, on a : $e^{-u} \leq \frac{1}{u}$.

II. Modes de convergence de la série de fonctions.

1. Trouver le domaine de définition de f (i.e. le domaine de convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$).

2. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. La série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+^*$?

III. Equivalent de f au voisinage de $+\infty$.

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer un équivalent simple de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

1. Démontrer que, pour $x > 0$:
$$f(x) \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On pose, pour $x > 0$:
$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-x(\sqrt{n}-1)}}{n\sqrt{n}}.$$
   (a) Justifier que $\psi(x)$ est bien définie.

   (b) Montrer que $\psi(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

   (c) Soit $x > 0$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\psi(x)$. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

IV. Deux résultats utiles pour la fin.

Dans ce paragraphe, on établit deux résultats indépendants utiles pour le dernier paragraphe.

1. Série de fonctions croissantes.
Soit $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note g sa somme.
Démontrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est croissante sur $]0, +\infty[$, alors g est aussi croissante sur $]0, +\infty[$.

2. Théorème de la limite de la dérivée.
Soit h une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. On suppose que $h'(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0.

(a) Soit $t > 0$, justifier l'existence d'un réel $c_t \in]0, t[$ tel que :

$$\frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = h'(c_t).$$

(b) En déduire que la fonction h n'est pas dérivable en 0 et préciser la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

V. Tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer l'allure de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, puis de tracer la courbe de f.

1. Justifier que la fonction f' est croissante sur $]0, +\infty[$.

2. En déduire que $f'(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ lorsque x tend vers 0.

3. Considérons $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.

   (a) Comparer pour $x > 0$, les réels $f'(x)$ et $\sum_{n=1}^{N} \frac{-e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

   (b) En déduire avec soin que :

   $$l \leq -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

   (c) Que peut-on en déduire pour l ?

4. Tracer l'allure de la courbe de f en représentant notamment la tangente au point d'abscisse 0.