DEVOIR LIBRE 5

Exercice 1

Soit α un réel strictement positif. Pour n entier naturel non nul, on considère l'application u_n de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}.$$

1. Etude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$.
   (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

   (c) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

   (d) On suppose dans cette question que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour x élément de $\mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

      i. Etablir l'inégalité : $R_n(x) \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$.

      ii. En déduire que la série $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, a]$ où a est un réel strictement positif.

   On note S l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. Etude de la continuité de S.
   (a) Montrer que, pour tout α, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

      i. En utilisant les mêmes idées qu'en 1.d., montrer que $S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+3/2}}$.

      ii. En déduire que S n'est pas continue en 0.

3. Etude de S en $+\infty$.
   (a) Montrer que S tend vers 0 en $+\infty$.

   (b) Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

4. Etude de la dérivabilité de S.
   (a) Montrer que, pour tout α, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que, pour $\alpha > 1$, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Problème : utilisation des polynômes de Tchebychev en interpolation polynômiale.

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est un élément de E, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.
On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynômiale.

1. **Notion de polynôme interpolateur.**
   f désigne une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. n est un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de $[-1,1]$. On appelle **polynôme interpolateur** de f aux points x_i, un polynôme P à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n vérifiant pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

   (a) **Quelques exemples.**

      i. Déterminer un polynôme interpolateur de la fonction $x \mapsto e^x$ dans le cas où $n=1$, aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

      ii. Déterminer un polynôme interpolateur de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ dans le cas où $n=2$, aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

   (b) **Cas général.** $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots P(x_n))$.

      i. Déterminer le noyau de φ.

      ii. Justifier que φ est un isomorphisme. En déduire que la fonction f admet un unique polynôme interpolateur de degré inférieur ou égal à n aux points x_i. On le note $L_n(f)$.

2. **Polynômes de Tchebychev.**
   Pour tout entier naturel n, on définit sur $[-1,1]$ la fonction T_n par $x \mapsto \cos(n\text{Arccos}x)$.

   (a) **Premières propriétés.**

      i. Montrer que pour tout x dans $[-1,1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.

      ii. Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3.

      iii. Justifier que T_n est une fonction polynômiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

   (b) **Racines.**
   Montrer que la fonction polynômiale T_n admet n racines distinctes que l'on précisera.

   (c) **Extrema alternés.**
   Calculer $\|T_n\|_\infty$ puis déterminer pour k dans $[\![0, n]\!]$ des réels c_k distincts avec $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$ tels que

   $$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k).$$

   Les $n+1$ réels c_0,c_1,…,c_n sont appelés "points de Tchebychev de T_n".

(d) **Une propriété de minimalité des polynômes de Tchebychev.**
Soit P un polynôme unitaire (le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1) de degré $n+1$. On pose $Q = P - 2^{-n}T_{n+1}$.

i. Le polynôme Q est-il de degré $n+1$?

ii. Montrer que $\|P\|_\infty \geq 2^{-n}$. On pourra raisonner par l'absurde, et s'intéresser aux changements de signe de Q en l'évaluant aux points de Tchebychev de T_{n+1}.
Le polynôme $2^{-n}T_{n+1}$ possède donc la norme infinie ($\|2^{-n}T_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}$) la plus petite parmi tous les polynômes unitaires de degré $n+1$.

3. **Expression et minimisation de l'erreur d'interpolation.**
On pose $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$, on définit alors une fonction polynômiale de degré $n+1$ que l'on note π_σ par $\pi_\sigma(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, pour x dans $[-1,1]$. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1,1]$. On rappelle que $L_n(f)$ est l'unique polynôme interpolateur de f aux points x_i de degré inférieur ou égal à n. On veut démontrer que pour tout réel x de $[-1,1]$, la propriété suivante $(\mathcal{P}_x)$:
$$\exists \xi_x \in]-1,1[, \qquad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x).$$

(a) Montrer que pour tout réel x de σ, $(\mathcal{P}_x)$ est vraie.

(b) Soient $p \geq 1$ un entier et g une fonction p fois dérivable sur $[-1,1]$. On suppose qu'il existe $p+1$ réels $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ de $[-1,1]$ tels que $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $g(a_i) = 0$.
Montrer par récurrence sur p qu'il existe ξ dans $]-1,1[$ tel que $g^{(p)}(\xi) = 0$.

(c) Soit x un réel de $[-1,1]$ qui n'est pas dans σ. On définit une application F sur $[-1,1]$ par $\forall t \in [-1,1]$, $F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda\pi_\sigma(t)$ où λ est un réel.

i. Déterminer le réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

ii. Montrer que F s'annule en $n+2$ points. En déduire que $(\mathcal{P}_x)$ est vraie.

(d) **Conclusion.**

i. En déduire que $\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty \|\pi_\sigma\|_\infty$.

ii. En vous servant des résultats du paragraphe **2.**, expliquer comment on peut choisir les points d'interpolation x_i pour contrôler l'erreur $\|f - L_n(f)\|_\infty$.