DEVOIR LIBRE 4 bis

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

- Dans $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ espace vectoriel réel de dimension n, on utilisera le produit scalaire canonique défini par
$$\forall U, V \in \mathcal{E}_n,\ (U|V) = U^T V$$
- On notera $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\ker(A)$ le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathcal{E}_n$.
- Dans $\mathcal{M}_n$, on notera0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det.
- $\mathcal{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n,\ \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n,\ M^T M = I_n\}$ désigne le groupe orthogonal d'indice n, formé des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n$.
- On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si $A, B, C, D, A', B', C', D$ $\mathcal{M}_n$ on a alors dans $\mathcal{M}_{2n}$:
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$$

1 Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ définie par
$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

On note
$$\mathcal{S}_{p_{2n}} = \{M \in \mathcal{M}_{2n},\ M^T J M = J\}$$

1. Calculer J^2 et J^T en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.
2. Vérifier que $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ et que pour tout réel α,
$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$$
3. Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.
4. Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.
5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.
6. Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.
7. Montrer que si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ alors $M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ écrite sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

8. Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

2 Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ c'est à dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}_{p_{2n}},\ \forall N \in \mathcal{S}_{p_{2n}},\ MN = NM\}$$

9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

   Récirpoquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.
11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.
12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$. *Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A, où $(E_{i,j},\ 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n$.*

3 Déterminant d'une matrice symplectique

Soit M dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ que l'on décompose sous forme de matrice blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec$A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que D est inversible.

13. Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n$ telles que

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

14. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^T D - C^T B) = 1$$

Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n$ telles que $P^T Q$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathcal{E}_n$ tels que

$$(Q - s_1 P)V_1 = (Q - s_2 P)V_2 = 0$$

15. Montrer que le produit scalaire $(QV_1 | QV_2)$ est nil.

    On suppose dorénavant D non inversible.

16. Montrer que $\ker(B) \cap \ker(D) = \{0\}$.

    Soit m un entier, $m \leq n$. Soit $s_1, \ldots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \ldots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_i B)V_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m$$

17. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i, i = 1, \ldots, m)$ forme un système libre de $\mathcal{E}_n$.
18. En déduire qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.
19. Montrer alors que toute matrice de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est de déterminant égal à 1.