DEVOIR LIBRE 4

Exercice 1

On note pour tout entier n, $n \geq 2$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2^2 & 5 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 3^2 & 7 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 2n-1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, exprimer D_n en fonction de n, D_{n-1} et D_{n-2}.
2. On note, pour tout $n \geq 3$:
$$u_n = D_n - (n+1)D_{n-1}.$$
Montrer :
$$\forall n \geq 4 \qquad u_n = n u_{n-1}.$$
3. En déduire l'expression de D_n en fonction de n, en faisant intervenir un symbole de sommation.

Exercice 2

E désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Enfin, f désigne l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme :

$$f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer A, la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$.
3. (a) Déterminer le noyau et l'image de f.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   (c) En déduire les valeurs propres, puis les sous-espaces propres de A.
   (d) Trouver une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.

(e) Exprimer A en fonction de B. (On pourra utiliser P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.)

4. (a) Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}.$$

1. (a) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   On note U la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

   (b) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
   La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

   (c) Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de u_n qui s'annule en 0.

   (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

   Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   (c) On note V la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$.
   Montrer que V est la primitive de U qui s'annule en 0.

3. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x réel, $p_0(x) = x$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout x réel,

   $$p_n(x) = x \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

   Montrer que la suite p_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.

Problème

Utilisation des séries de Grégory pour l'approximation de π.

Le problème propose l'étude d'une approximation de π. Elle utilise des séries de Grégory définies dans la partie **I**. Les parties **II** et **III** peuvent être traitées de manière indépendante.

I. Séries de Grégory

Pour tout réel a de $]0,1]$, on définit la série de Grégory de paramètre a par :

$$G_a = \sum (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}.$$

1. Convergence de la série G_a

   (a) Montrer que la série G_1 est convergente. Est-elle absolument convergente ? Justifier votre réponse.

   (b) Montrer que pour $a \in]0,1[$, la série G_a est absolument convergente.

   On notera, dans la suite, $G(a)$ la somme de la série G_a, c'est à dire $G(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}$.

2. Soit $a \in]0,1]$.

   (a) Etudier les variations de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{a^n}{2n+1}$.

   (b) Pour tout entier naturel n, on note $G_{n,a}$ la n-ième somme partielle de la série G_a, c'est à dire

   $$G_{n,a} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^k}{2k+1}.$$

   Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|G(a) - G_{n,a}| \leq \frac{a^{n+1}}{2n+3}$.

II. Expression de la fonction Arctangente à l'aide de séries de Grégory.

1. Ecrire pour $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1+x^2}$ comme la somme d'une série.

2. Justifier que pour $x \in]-1,1[$, Arctan $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
   En déduire une expression de Arctan a à l'aide de la somme d'une série de Grégory lorsque $a \in]0,1[$.

III. Formule de John Machin.

1. Calculer $\tan\bigl(2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\bigr)$ puis $\tan\bigl(4\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\bigr)$. On donnera les résultats sous forme de rationnels.

2. En déduire la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

IV. Application de la formule de Machin pour approcher π.

1. Expression de π comme combinaison linéaire de 2 séries de Grégory.
   Déterminer 4 réels strictement positifs λ_1, λ_2, a_1 et a_2 tels que $\pi = \lambda_1 G(a_1) - \lambda_2 G(a_2)$.

2. Précision de l'approximation.

   (a) Déterminer un entier K tel que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2})| \leq \frac{K}{25^{n+1}}.$$

   (b) Trouver un entier N pour lequel

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \qquad |\pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2})| \leq 10^{-6}.$$

Remarques :

- Cette méthode d'approximation de π utilisée par John Machin (1680-1752) permit à ce dernier de calculer "à la main" 100 décimales exactes de π en 1706.
- Les approximations de π à l'aide des séries de Grégory permirent d'obtenir à l'aide d'ordinateurs un million de décimales en 1974 (J. Guilloud et M. Bouyer).
- Aujourd'hui, les mathématiciens ont trouvé d'autres types de techniques encore plus performantes, qui leur permettent de calculer plusieurs milliards de décimales.