DEVOIR LIBRE 4

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Etude de la diagonalisabilité de A.
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
   (b) Déterminer le spectre de A et ses sous-espaces propres.
   (c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, on donnera D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A, rangées par ordre croissant et P la matrice telle que $D = P^{-1}AP$ et dont la première ligne est constituée de 1 uniquement.
2. Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit $\mathcal{C}_k = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = kMA\}$ et $\mathcal{C}'_k = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid DN = kND\}$
   (a) Montrer que $\mathcal{C}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On admet que $\mathcal{C}'_k$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer $\mathcal{C}'_0$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_{-2}$ et $\mathcal{C}'_{-1}$.
   (c) Déterminer une base de $\mathcal{C}_1$ et une base de $\mathcal{C}_{-1}$.
3. Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ dont la base canonique est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, avec $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,. . ., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.
L'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ est noté Id.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad f(e_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} e_k.$$

1. Préciser la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit D la droite vectorielle de vecteur directeur $u_D = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Calculer $f(u_D)$.
3. On note g l'endomorphisme défini par $g = f + \text{Id}$.
   (a) Préciser l'image de g. En déduire la dimension du noyau H de g.
   (b) Calculer $f(h)$ pour tout vecteur $h \in H$.
4. Montrer que D et H sont supplémentaires.
5. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ une base de H.
   (a) Déterminer la matrice de f dans la base $(u_D, v_1, \ldots, v_{n-1})$.
   (b) Montrer qu'il existe deux réels a_2 et b_2 que l'on déterminera, tels que :
   $$f^2 = a_2 f + b_2 \text{Id} \qquad \text{où} \qquad f^2 = f \circ f.$$
   (c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels a_p et b_p que l'on déterminera en fonction de p et de n, tels que :
   $$f^p = a_p f + b_p \text{Id} \qquad \text{où} \qquad f^p = f \circ f^{p-1}.$$