DEVOIR LIBRE 3 bis

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un vecteur propre commun.
Les parties I et III traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et n. Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.
Les parties II et III sont, pour une grande part, indépendantes l'une de l'autre.

Notations et définitions.

Soit n un entier naturel non nul.
0_n est la matrice nulle d'ordre n et I_n la matrice identité d'ordre n.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(M) = \{MX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\},$$

$$\mathrm{Sp}(M) \text{ le spectre de } M, \quad E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}_\lambda(M) = \mathrm{Im}(M - \lambda I_n).$$

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; on dit que e est un **vecteur propre commun** à A et B si :

(i) $e \neq 0$;
(ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Ae = \lambda e$;
(iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $Be = \mu e$.

On définit $[A, B]$ par la formule $[A, B] = AB - BA$.
De même, pour deux endomorphismes de E, f et g, on définit l'endomorphisme $[f, g]$ de E par la formule : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : étude dans un cas particulier.

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le spectre de A.
   (b) Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

   (c) A est-elle diagonalisable ?
   (d) Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.

2. (a) Déterminer le spectre de B.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(u_4)$ et que $\dim((E_2(B)) = 2$.
   (c) B est-elle diagonalisable ?

3. (a) Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(u_5)$.
   (b) Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.

4. (a) Vérifier que $[A, B] = C$.
   (b) Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II : condition nécessaire et conditions suffisantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

1. Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B.
   (a) Montrer que $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}([A, B])$.
   (b) Vérifier que $\mathrm{rg}([A, B]) < n$.

   Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   On dit que A et B vérifient la **propriété** $\mathcal{H}$ s'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A, B]).$$

2. Montrer que si $[A, B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
   (a) Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.
   (b) En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ la propriété suivante :
   pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ.

4. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.

5. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$.

   On note $C = [A, B]$, on suppose que $\mathrm{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

   (a) Justifier l'existence de $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $Au = \lambda u$ et $Cu \neq 0$.
   (b) Vérifier que $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(v)$ où $v = Cu$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.

(d) Etablir les inégalités suivantes : $1 \leq \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leq n-1$.

Pour tout $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A))$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

(e) Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

(f) Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Partie III : étude d'un autre cas particulier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P.
Pour tout polynôme P de E, on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Montrer que $g(P) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

2. Montrer que f et g définissent des endomorphismes de E.

3. (a) Vérifier que si P est un vecteur propre de g alors $\deg(P) \geq n$.
   (b) Montrer que X^n est vecteur propre de g.

   Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. f^i correspond à la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f est prise i fois.

4. (a) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}$.

5. Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geq n+1$.
   $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de E définie par : $\mathcal{B}_c = (1, X, \ldots, X^{2n})$.
   On note A_n la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ et B_n celle de g dans la même base.

6. Déterminer A_n et B_n.

7. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.

   (a) Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire l'expression de A_1^2 et A_1^3.

   (b) Déterminer le rang de $[A_1^i, B_1]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

   (c) En déduire que la condition nécessaire de la question **II.1.b** n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question **II.6** n'est pas nécessaire.