DEVOIR LIBRE 3

Problème

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est cyclique si et seulement si il existe un vecteur a de E tel que $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

La première partie du problème est consacrée à l'étude d'exemples; La seconde propose l'étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Les deux parties sont totalement indépendantes.

Partie I : études d'exemples.

1. On considère dans cette section que $E = \mathbb{R}^2$.
Soit α l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$ est la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) On choisit $a = (2, 3)$. Déterminer le vecteur $\alpha(a)$ et montrer que α est cyclique.
   (b) Déterminer le vecteur $\alpha^2(a)$ puis déterminer deux réels x et y tels que :
   $$\alpha^2(a) = xa + y\alpha(a).$$
   (c) Déterminer la matrice A' de α dans la base $(a, \alpha(a))$.
   (d) Montrer qu'il existe un vecteur non nul u de $\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(u) = 2u$.
   (e) Déterminer un vecteur b non nul de $\mathbb{R}^2$ tel que $(b, \alpha(b))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère dans cette section que $E = \mathbb{R}^3$.
Soit β l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ est la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Trouver tous les vecteurs u de E tels que $\beta(u) = 2u$, puis tous ceux tels que $\beta(u) = u$.
   (b) Donner une base de E dans laquelle la matrice de β soit la matrice
   $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) Montrer que β est un automorphisme de E.
   (d) Montrer que $\beta^2 - 3\beta + 2\mathrm{Id} = 0$.
   (e) En déduire que β n'est pas cyclique.

3. On considère dans cette section que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit γ l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme P'. On admettra que γ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n-1$, déterminer $\gamma^k(X^{n-1})$.
   (b) En déduire que γ est cyclique.

Partie II : un exemple dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Dans cette partie, on se donne un entier n supérieur ou égal à 2.
On considère l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme $Q = P(X+1) - P$.
On admettra que δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.

1. Dans cette question, on montre que δ est cyclique.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leq k \leq n-1$. Montrer que $\delta(X^k)$ est exactement de degré $k-1$.
   (b) Soit P un élément quelconque de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme P étant supposé de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$.
   (c) Montrer que δ est cyclique.
2. Dans cette question, on détermine le noyau et l'image de l'endomorphisme δ.
   (a) Montrer que le noyau de δ est l'ensemble des polynômes constants.
   (b) Montrer que l'image de δ est $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. Dans cette question, on introduit une famille de polynômes $(P_i)_{0\leq i\leq n-1}$ qui va permettre de montrer d'une autre manière que δ est cyclique. On définit, $P_0 = 1$ et pour $i = 1, \ldots, n-1$,
$$P_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$
   (a) Montrer que la famille $(P_i)_{0\leq i\leq n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 4$. Déterminer les coordonnées de $P = X^3 - 5X^2 + X - 3$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Soient i et j deux entiers naturels, tels que $j \neq 0$ et $1 \leq i \leq n-1$. Montrer que $\delta(P_i) = P_{i-1}$ puis déterminer $\delta^j(P_i)$ en distinguant les cas $j \leq i$ et $j > i$.
   (d) En déduire une autre démonstration du fait que δ est cyclique.

Exercice
On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\to\infty} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$. On note S la somme de cette série, S est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Etudier la parité de S.
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Que peut-on dire de la continuité de S sur $\mathbb{R}^*$?
4. Montrer que S tend vers 0 en $+\infty$.
5. Montrer que S diverge vers $+\infty$ en 0^+.
6. Montrer que $x^2S(x)$ converge vers $\frac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ quand x tend vers 0^+. (On remarquera que la fonction $u \mapsto \frac{u}{\operatorname{sh}(u)}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.)
7. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.