DEVOIR LIBRE 3

Exercice 1
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
   (a) Vérifier que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.
   (b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et calculer sa somme.
2. On prend **dans cette question**, $a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.
   (a) Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$?
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$.
   (d) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$?
3. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{2n} \leq u_n.$$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.
   (c) Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.
   (d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge.
   (e) A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?
4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.
   (a) Vérifier que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \leq n,\ B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.
   (b) En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge.
   (c) Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Exercice 2
On veut connaître les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} &= -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} &= -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice carrée A telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

   On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B}$, soit A. On note Id l'identité de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer F_1=ker(f+Id). On note v_1 l'unique vecteur de F_1 tel que sa première coordonnée soit 1. Donner $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(v_1) = \lambda_1 v_1$.
4. Calculer le rang de A. En déduire la dimension du noyau de f, noté F_2. On note v_2 l'unique élément de F_2 dont la première coordonnée est 1. Donner $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(v_2) = \lambda_2 v_2$.
5. On note $v_3 = (1, 1, 1)$. Trouver $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $f(v_3) = \lambda_3 v_3$. On note F_3 =ker($f-$Id). Montrer que F_3 =Vect(v_3) sans calculer F_3, en raisonnant sur les dimensions.
6. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
7. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Exprimer P et calculer P^{-1}.
8. Quel est le lien entre A, P et D ?
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A^n à l'aide de P, D et n. En déduire que pour tout entier naturel non nul k, $A^{2k-1} = A$ et $A^{2k} = A^2$. Calculer A^2.
10. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.
11. On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
    (a) Déduire de ce qui précède l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
    (b) Montrer que dans ce cas les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir d'un certain rang à préciser. Quel est le comportement de ces trois suites lorsque n tend vers l'infini ?
12. On suppose ici que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer en fonction de la parité de n l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser lesquelles n'ont pas de limite.
13. On revient au cas général. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0, v_0 et w_0 pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Quelles sont alors les limites de ces suites ?

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note i l'application identité de E.
On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq 0, \quad f^2 + i \neq 0, \quad f \circ (f^2 + i) = 0.$$

1. (a) Montrer que f n'est pas bijectif.

   (b) Montrer qu'il existe $u \in E$, $u \neq 0$ tel que $f(u) = 0$.

   Soit v_1 appartenant à E tel que $v_1 \neq 0$ et $f(v_1) = 0$.

2. (a) Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif.

   (b) Montrer qu'il existe $v \in E$, $v \neq 0$ tel que $f^2(v) = -v$.

   Soit v_2 appartenant à E tel que $v_2 \neq 0$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

3. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

   (b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.

   On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

4. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

5. Montrer : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM = MC\} = \mathcal{F}$.

6. (a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

   (b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

7. On note $g = f^2 - i$. Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et i.