DEVOIR LIBRE 2 bis

Problème 1

Partie I : règle de Cauchy

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{1/n} = l$. Montrer **la règle de Cauchy** suivante :

$$\text{si } l < 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ converge et si } l > 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge.}$$

2. Donner la nature des séries suivantes : $\sum \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$, et $\sum \frac{n^{\ln n}}{(lnn)^n}$.

Parie II : comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

1. **Théorème de Césàro.**
Soit (x_n) une suite réelle convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$.
On veut montrer que la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, converge également vers l.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La convergence de (x_n) vers l donne : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|y_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum\limits_{p=1}^{n} |x_p - l|$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N$. Montrer que
$$|y_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{N} |x_p - l| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (c) Conclure.

2. Soit (x_n) une suite réelle telle que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ converge vers l.

Remarque : on pourrait obtenir les mêmes résultats avec $l = +\infty$ ou $l = -\infty$. On n'en demande pas de démonstration, mais on pourra l'utiliser.

3. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ tende vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{x_n})$ converge vers l. (*On pourra distinguer* $l = 0$ *et* $l \neq 0$ *et appliquer* ln *pour se ramener au cas précédent.*)
Conclusion : si la règle de d'Alembert s'applique, celle de Cauchy aussi.

4. Soit (u_n) définie par $u_n = e^{(-1)^n - n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comparer les règles de d'Alembert et de Cauchy pour la série de terme général u_n. Que peut-on conclure ?

Problème 2 Le but de ce problème est de donner, dans les parties I et II, quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III, la vitesse de convergence de ces quatre séries.

Partie I

1. (a) Soit $t \in]-1,1]$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sum\limits_{n=0}^{N} (-t)^n$.

   (b) En déduire que pour $x \in]-1,1]$ et pour $N \in \mathbb{N}$,

   $$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{N+1} \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt.$$

   (c) Soit $x \in]-1,0]$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer $|\int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt| \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}$.

   (d) Soit $x \in [0,1]$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $|\int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt| \leq \frac{1}{N+2}$.

   (e) Soit $x \in]-1,1]$. Montrer que $\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge.
   On distinguera le cas $x \in]-1,1[$ et le cas $x = 1$.

   (f) Soit $x \in]-1,1]$. Montrer que

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x).$$

   On montrerait de même (il n'est pas demandé de le faire, mais on pourra utiliser le résultat si nécessaire)

   $$\forall x \in [-1,1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

   (g) En déduire que

   $$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} \quad \text{et} \quad \ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

2. (a) Soit $x \in]-1,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que

   $$(1+x)\ln(1+x) - x = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + R_N(x)$$

   avec $|R_N(x)| \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}$.

   (b) Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que la série $\sum (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)}$ converge.

   (c) Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} = (1+x)\ln(1+x) - x.$$

(d) En déduire que

$$\ln(2) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

Partie II

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \ldots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n = \dfrac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

   (b) Rappeler la formule de Stirling.

   (c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\, dx$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n - I_{n+1} = \dfrac{I_{n+1}}{2n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\dfrac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$ converge et donner sa somme.

   (b) (Il n'y a pas de réponse à donner ici, juste à enregistrer les résultats). On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} dx.$$

   On admet l'enchaînement suivant (et que les objets écrits ont un sens)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} dx = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = \ln(2).$$

Partie III

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}, \quad S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \text{ et } V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'ordre n des séries vues en première et deuxième partie. Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n), (S_n), (T_n) et (V_n).

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $U_n = \sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer U_n. Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

   (c) Montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n)$ $[n \to +\infty]$.

   (d) Conclure que $R_n \sim \frac{1}{n2^n}$.

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1] \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

   (c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$

   (d) Conclure que $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \geq N, \quad (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \leq a_k \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}.$$

   (b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$.

   (c) Déduire des questions précédentes que:

$$\forall n \geq N, \quad (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq T_n \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

   (d) Conclure que $T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \frac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement ? Laquelle converge le moins rapidement ? Justifiez vos réponses.