DEVOIR LIBRE 2 bis

Problème 1 Etudes de restes de séries convergentes.

Les parties I et II sont indépendantes entre elles.

Partie I : étude de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}, \, n \in \mathbb{N}$.

1) **a)** Rappeler l'énoncé d'un théorème (y compris l'évaluation du reste) permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^\star$.

b) En remarquant que $\frac{1}{p} = \int_0^1 x^{p-1}dx$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et en s'aidant d'une suite géométrique montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\ .$$

2) **a)** Par intégration par parties , montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel k différent de 0 tel que :

$$R_n = k\frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)\ .$$

b) En déduire la nature de la série de terme général R_n .

3) Déterminer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Partie II : étude de $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}},\ n \in \mathbb{N}$.

1) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

a) Montrer qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = L + 2\,.$$

b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\theta}}$ et en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini .

2) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

a) Étudier la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini. (On pourra écrire v_n comme le reste d'une série convergente.)

b) Déterminer un équivalent de $v_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini ; en déduire que U_n est de la forme, lorsque n tend vers l'infini :

$$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + \frac{D}{n\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

avec A, B, C et D des réels à déterminer, éventuellement en fonction de L.

3) **a)** Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$.

b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n} .

c) En déduire qu'il existe trois réels a, b et c que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + \frac{c}{n\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) .$$

Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n .

Problème 2 Les p-séries alternées.

Etant donné un entier naturel non nul p, une série $\sum u_n$ sera dite une p-série alternée s'il existe un entier naturel n_0 et une suite réelle (a_n) de signe constant, tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$u_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} a_n$$

où E désigne la fonction partie entière. Avec cette définition, une 1-série alternée sera donc une série alternée à partir d'un certain rang.

1) Sur les 1-séries alternées.

a) Etant donnée une série alternée $\sum (-1)^n a_n$ (avec a_n de signe constant) énoncer sans démonstration une condition suffisante pour que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$?

b) Quelle est la nature des séries suivantes ?

i) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

ii) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2) Sur les p-séries alternées, (où p désigne un entier fixé supérieur ou égal à deux).
Pour simplifier, on suppose, dans les questions 2)a), 2)b) et 2)c), que n_0 est égal à zéro. On considère une p-série alternée $\sum u_n$ et on lui associe la série $\sum v_q$ avec, pour q entier naturel,

$$v_q = \sum_{n=pq}^{n=pq+p-1} u_n.$$

a) Montrer que $\sum v_q$ est une série alternée.

b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Montrer, en étudiant les sommes partielles de chacune des deux séries, que la convergence de la série $\sum u_n$ équivaut à la convergence de la série $\sum v_q$.

c) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$,

$$|u_{n+1}| \leq |u_n|.$$

Quelle est la nature de la série $\sum v_q$?

d) On considère la série $\sum u_n$ avec

$$u_n = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < 2p,$$

$$u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}}{\sqrt{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + (-1)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}}} \quad \text{pour tout} \qquad n \geq 2p.$$

Expliciter v_q ; en déduire la nature de la série $\sum u_n$.