DEVOIR LIBRE 2

Problème 1 La série harmonique

Partie I : deux résultats préliminaires

1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes :
   (i) la série de terme général a_n est convergente ;
   (ii) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

   (a) Soit ε un réel strictement positif. Justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n.$$
   (b) En déduire pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, l'inégalité suivante :
   $$|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$
   (c) Etablir l'équivalence suivante :
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

2. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier N strictement supérieur à n, la double inégalité suivante :
   $$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n}^{N} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$
   (b) Etablir l'équivalence suivante :
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Partie II : développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique

On s'intéresse aux suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad \gamma_n=H_n-\ln n,\quad x_n=\gamma_n-\frac{1}{2n}\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2\quad y_n=x_n-x_{n-1}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$: $\ln(n+1)\leq H_n\leq 1+\ln n$.

   (b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ converge (on pourra étudier ses variations).
   On notera γ sa limite.

   (c) Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\gamma_{n+1}-\gamma_n$.
   Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)$?
   Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat du (b).

   (d) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$: $\gamma_n-\gamma=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$.

   (e) Montrer que :
   $$\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2k^2}.$$

   (f) Montrer que :
   $$\gamma_n-\gamma\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

   (g) Montrer que :
   $$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad [n\to+\infty].$$

2. (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$?

   (b) Justifier pour tout entier naturel non nul, l'égalité suivante :
   $$\gamma-x_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}y_k.$$

   (c) En déduire pour tout entier naturel non nul, l'égalité suivante :
   $$\gamma-x_n=\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right).$$

3. Montrer
   $$\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3k^3}.$$

4. Montrer que
   $$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad [n\to+\infty].$$

Exercice
On se propose d'étudier la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ \text{ et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. **Transformation matricielle du problème**.
   (a) Déterminer X_0 et X_1.
   (b) Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
2. **Calcul des puissances de** A.
   On notera f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, i.e. dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A.
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. On trouvera une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur dont la première coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est 1.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id})$. On trouvera une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur dont la première coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est 1.
   (c) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. On choisira le troisième vecteur de la base avec une première coordonnée égale à 1.
   (d) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Expliciter P et calculer P^{-1}.
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
   (f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n.
   (g) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
3. **Retour à la suite** (u_n).
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Etablir la convergence et déterminer la limite de la suite (u_n).