DEVOIR LIBRE 2

Etude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente
Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0, r_n son reste de rang n : $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.
Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

1. **Exemple 1**
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{2^n}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n puis montrer que $\sum r_n$ converge et calculer sa somme.

2. **Exemple 2**
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n^2}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier N supérieur à 2 et à $n+1$, on a
   $$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier naturel non nul, on a
   $$\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$
   (c) En déduire un équivalent de (r_n).
   (d) Que peut-on conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} r_n$?

3. **Exemple 3**
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
   (a) Justifier la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
      i. Montrer que (I_n) converge vers 0.
      ii. Montrer que $I_n = \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.
      iii. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer r_n en fonction de I_n.
   (c) Conclusion
      i. En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :
      $$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
      où $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.
      ii. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} r_n$.