DEVOIR LIBRE 1 bis

Exercice 1
On introduit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx.$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite monotone qui converge vers 0.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3} dx.$$

3. En déduire un équivalent pour la suite (u_n).

4. Déterminer des nombres réels α_1, α_2 et α_3 tels que :

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5} dx.$$

5. En déduire des nombres réels α et β, qu'on explicitera, tels que la suite (u_n)admette un développement de la forme :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$. On introduit la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \int_0^1 x^n g(x) dx.$$

   Démontrer que pour tout entier naturel non nul k, la suite (v_n) admet un développement de la forme :

$$v_n = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

   Exprimer les nombres β_1 et β_2 en fonction de g.

7. Soit h une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Démontrer que la suite $(n \int_0^1 x^n h(x) dx)$ admet une limite finie et exprimer cette limite en fonction de h.

Exercice 2

1. Soit z un nombre complexe, de partie réelle x et de partie imaginaire y, tels que $(x,y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$. On note
$$\theta(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \text{et} \quad R(z) = \frac{z+|z|}{\sqrt{2(Re(z)+|z|)}}$$
   (a) Justifier que θ et R sont bien définis.
   (b) Lorsque z vaut successivement $z_1 = 4$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$, calculer $R(z)$, $\theta(z)$ et $(R(z))^2$.
   (c) Vérifier que $\theta(z) \in]-\pi,\pi[$ et que $R(z) \in \mathcal{P} = \{Z \in \mathbb{C}/\ Re(Z) > 0\}$.
   (d) Représenter sur une figure le cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon $|z|$ et les points M d'affixe z et B d'affixe $-|z|$.
   En considérant des angles bien choisis, montrer que
$$\theta(z) = \text{Arg}(z) = 2\text{Arg}(z+|z|)$$
   où $\text{Arg}(z)$ désigne la détermination proncipale de l'argument du nombre complexe z.
   (e) Déterminer $(R(z))^2$, $\theta \circ R(z)$ et $|z|^{1/2}e^{i\theta(z)/2}$ en fonction de z, $R(z)$ et $\theta(z)$.
   (f) Résoudre à l'aide de E l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   (g) En déduire que R est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans $\mathcal{P}$. Préciser sa bijection réciproque.

2. **Dans la suite de l'exercice**, on prolonge R à $\mathbb{C}$ en posant $R(x) = i\sqrt{|x|}$ si $x \in \mathbb{R}^-$.
Soient a, b deux nombres complexes tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
On dit qu'une suite complexe $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(E_{a,b})$ si l'on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + bu_n$$
   (a) On suppose que $a^2+b \neq 0$. On note $d = R(a^2+b)$. On appelle W la suite $W = ((a+d)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et W' la suite $W' = ((a-d)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \text{Vect}(W, W')$.
   Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ en fonction de d, W et W'.
   (b) On suppose que $a^2 + b = 0$ et $a \neq 0$. On note W et W' les suites $W = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $W' = (na^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \text{Vect}(W, W')$.
   Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ en fonction de a, W et W'.
   Dans la suite de l'exercice, on note :
   • $U(a,b) = (U_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $U_0(a,b) = 0$ et $U_1(a,b) = 1.$;
   • $V_n(z) = U_{n+1}(z,-1)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Expliciter $V_1(z)$, $V_2(z)$ et $V_3(z)$.
   (d) Montrer que, pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$V_n(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (2z)^{n-2j}(-1)^j \qquad (I.1)$$