DEVOIR LIBRE 1bis

Exercice

On note U l'ensemble des complexes de module 1, P l'ensemble des complexes de partie imaginaire strictement positive et D l'ensemble des complexes de module strictement plus petit que 1.

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \qquad P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \qquad D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

On appelle homographie toute application h à valeurs complexes, pour laquelle il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ avec $ad - bc \neq 0$, qui à tout complexe z tel que $cz + d \neq 0$ associe $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Soit h l'homographie définie, pour les complexes $z \neq 1$, par $h(z) = i\frac{1+z}{1-z}$.
   (a) Montrer que pour tout z dans U tel que $z \neq 1$, $h(z) \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout z dans D, $h(z) \in$ P.
   (c) Déterminer les complexes z tels que $h(z) = z$.
   (d) Pour quel(s) $Z \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = Z$ d'inconnue $z \neq 1$ possède-t-elle une solution ?
2. Soit g l'homographie définie, pour les complexes $z \neq -i$, par $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
   (a) Montrer que pour tout réel z, $g(z) \in U$.
   (b) Montrer que pour tout $z \in$ P, $g(z) \in D$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$, pour tous les complexes z non nuls. Montrer que pour tout $z \in U$, $h(z) \in U$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin U$ et h l'homographie définie par $h(z) = e^{i\theta}\frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.
   (a) Montrer que h est bien une homographie et que h est bien définie sur U.
   (b) Montrer que $\forall z \in U$, $h(z) \in U$.

Problème

Pour tout entier naturel n, on note P_n la fonction polynomiale définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{2n}.$$

Ainsi, pour tout réel x, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 + x + x^2$ et $P_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

Partie I

1. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Montrer que pour tout réel $x \neq 1$, $P_n(x) = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x}$.

   (b) Déterminer alors les racines complexes de P_n. P_n a-t-elle des racines réelles ?

2. Quels sont les réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ? En cas de convergence, préciser sa limite.

3. Soit n un entier naturel non nul ; on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1$.

   (a) Pour $x \neq 1$, exprimer $P_n'(x)$ en fonction de $\varphi_n(x)$.

   (b) Préciser les valeurs de $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et celles de $P_n'(1)$, $P_n'(-1)$.

   (c) Etudier les variations de la fonction φ_n sur $\mathbb{R}$ et en déduire celles de P_n ; on résumera la situation dans un tableau de variations de ces deux fonctions.

   (d) Justifier qu'il existe une unique valeur $\alpha_n \in]-1, 0[$ en laquelle φ_n s'annule puis vérifier que la fonction P_n prend une valeur minimale β_n en α_n et que $\beta_n > 0$.

4. Soit n un entier, $n \geq 2$. Dessiner dans un même graphique les courbes représentatives des fonctions P_n, P_{n+1} ainsi que celle de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ définie sur $]-\infty, 1[$; on précisera les positions relatives de ces courbes et notamment leurs points d'intersection.

5. (a) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n^{2n} = \frac{1}{1+2n(1-\alpha_n)}$ et justifier l'encadrement

   $$\frac{1}{1+4n} \leq \alpha_n^{2n} \leq \frac{1}{1+2n}.$$

   (b) En déduire la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et donner sa limite.

   (c) Donner un équivalent de $(\alpha_n + 1)_{n\geq 1}$.

6. (a) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ converge vers $1/2$.

   (b) Montrer que la suite $(\beta_n - \frac{1}{2})_{n\geq 1}$ est équivalente à la suite $\left(\frac{\ln n}{8n}\right)_{n\geq 1}$.

Partie II

Pour tout couple $u = (x, y)$ de réels, on considère la fonction f_u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_u(t) = \frac{x + ty}{P_1(t)}.$$

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction f_u est bornée.

2. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $N(u) = \sup\{|f_u(t)| \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Si $y = 0$, montrer que $N(u) = \frac{4}{3}|x|$.

   (b) On suppose $y \neq 0$.
      i. Montrer que $M = \sup\{f_u(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\} > 0$ et que $m = \inf\{f_u(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\} < 0$ et justifier que ces bornes sont atteintes.

      ii. Montrer que $N(u) = 1$ si et seulement si $M = 1$ et $m \geq -1$ ou $M \leq 1$ et $m = -1$.

      iii. Montrer que $f_u(t_0) = M = 1$ si et seulement si t_0 est racine double de l'équation $t^2 + (1 - y)t + (1 - x) = 0$, puis justifier que $(1 - y)^2 = 4(1 - x)$.

      iv. Montrer que $f_u(t_0) = m = -1$ si et seulement si t_0 est racine double de l'équation $t^2 + (1 + y)t + (1 + x) = 0$, puis justifier que $(1 + y)^2 = 4(1 + x)$.

3. (a) Reconnaître la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $(1 - y)^2 = 4(1 - x)$ ainsi que celle d'équation $(1 + y)^2 = 4(1 + x)$, et les dessiner sur un même graphique.

   (b) Préciser l'ensemble S des points $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $N(u) = 1$ et le dessiner sur la figure précédente.