DEVOIR LIBRE 16

Pour tout nombre entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction J_n de la variable réelle x par :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)dt$$

(on ne cherchera pas à calculer cette intégrale)

Partie I

1. Montrer que J_n est définie sur $\mathbb{R}$, paire si n est pair et impaire si n est impair.

2. Exprimer $J_{-n}(x)$ en fonction de $J_n(x)$.

On supposera dorénavant que n est un nombre entier positif ou nul.

3. Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'on a $J_n'(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos t.\left[(n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)\right] dt$.
   En déduire que J_n est solution de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_n) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Partie II

5. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2pt.\cos(x\sin t)dt, \qquad J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2p+1)t.\sin(x\sin t)dt.$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est développable en série entière de x sur $\mathbb{R}$ tout entier (on utilisera les développements en série entière des fonctions cosinus ou sinus, selon la parité de n).

7. Soit p un nombre entier naturel.
   (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \cos 2pt.\sin^{2k} t dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p (on pourra exprimer $\sin^{2k} t$ comme combinaison linéaire des $\cos 2qt$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \leq k$). Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k < p$.
   En déduire les coefficients $\alpha_{2k}(p)$ du développement en série entière de J_{2p} sur $\mathbb{R}$

$$J_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k}(p)x^{2k}.$$

(b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2p+1)t.\sin^{2k+1} t dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p (on pourra exprimer $\sin^{2k+1} t$ comme combinaison linéaire des $\sin(2q+1)t$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \leq k$). Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k < p$.
En déduire les coefficients $\alpha_{2k+1}(p)$ du développement en série entière de J_{2p+1} sur $\mathbb{R}$

$$J_{2p+1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1}(p) x^{2k+1}.$$

Partie III

On considère l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_\lambda) \qquad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2) y = 0$$

où λ est un nombre réel donné.

8. (a) Montrer que, pour que $x^\lambda z(x)$ soit solution de (B_λ) sur $]0, +\infty[$, il faut et il suffit que z soit solution de l'équation :

$$(B'_\lambda) \qquad xz'' + (2\lambda + 1)z' + xz = 0.$$

(b) Dans le cas où $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, déterminer la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$, et en déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

(c) En déduire la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ lorsque $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

On se propose à présent de chercher les solutions de (B_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $y(x) = x^\lambda z(x)$, où $z(x)$ est la somme d'une série entière.

9. On cherche les solutions de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $z(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

(a) Etablir la relation qui doit exister pour tout $k \geq 1$ entre a_{k+1} et a_{k-1} pour que z soit solution de (B'_λ).

On suppose dorénavant que λ n'est pas un entier strictement négatif.

(b) Montrer qu'il existe une unique solution z_λ de (B'_λ) de la forme $z_\lambda(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda) x^{2p}$, et telle que $a_0(\lambda) = 1$. Calculer $a_{2p}(\lambda)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2p}(\lambda) x^{2p}$?

10. On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction j_λ par $j_\lambda(x) = x^\lambda z_\lambda(x)$.

(a) On suppose que λ n'est pas un nombre entier.
Montrer que les fonctions j_λ et $j_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.
En déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

(b) Soit n un nombre entier strictement positif.
Comparer j_n à la fonction J_n, définie au début du problème.
Vérifier que la fonction z_{-n}, définie par $z_{-n}(x) = x^{2n} z_n(x)$ est solution de l'équation (B'_{-n}).