

## DEVOIR LIBRE 16\*

**Problème 1**

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$  et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle  $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , une fonction  $f$  indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(p)}(0) = b_p$ .

**Partie I - Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt.$$

**Q1.** Montrer que la fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$ .

**Q2.** Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , justifier l'existence de  $\Gamma_p$  et déterminer une relation entre  $\Gamma_{p+1}$  et  $\Gamma_p$ .

**Q3.** En déduire, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $\Gamma_p$ .

**Q4.** Montrer que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(p)}(x)$ .

**Q5.** En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$ .

La fonction  $f$  est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

**Q6.** Montrer que  $g$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $g^{(p)}(x)$ .

**Q7.** Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $|g^{(p)}(0)| \geq p^{2p} e^{-p}$ .

**Q8.** En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$ .

La fonction  $g$  est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

**Partie II - Le théorème de Borel**

**Q9.** Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

**Q10.** On considère la fonction  $\Psi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \frac{1}{x-i}$ .

Montrer par récurrence que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\Psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

**Q11.** Déterminer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $p$ -ième de la fonction  $\varphi_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Q12.** Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$ .

En déduire que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$|\varphi_1^{(p)}(x)| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

**Q13.** Pour tout réel  $\alpha$ , notons  $\varphi_\alpha$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$|\alpha| |\varphi_\alpha^{(p)}(x)| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on lui associe la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n! a_n^2 x^n}.$$

**Q14.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\alpha_n = \sqrt{n!} a_n$ . Montrer que pour tout entier  $p \geq 0$ , tout entier  $n \geq p$  et tout réel  $x$ , on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

**Q15.** En déduire que pour tout entier  $n \geq 0$  et tout entier  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $u_n^{(p)}(0) = 0$  et déterminer  $u_n^{(n)}(0)$ .

**Q16.** Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , tout entier  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et tout réel  $x$ , on a :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

**Q17.** En déduire que la fonction  $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est bien définie et indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**Q18.** Montrer que  $U(0) = a_0$  et pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$ .

**Q19.** Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle  $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , il existe une fonction  $f$  indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(p)}(0) = b_p$ .

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle.

**Problème 2****Notations et définitions**

- Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .
- $\mathbb{R}[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Si  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on notera encore  $P$  la fonction polynomiale associée.
- $M_p(\mathbb{R})$  et  $M_p(\mathbb{C})$  désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille  $p$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ .  $M_{p,q}(\mathbb{R})$  et  $M_{p,q}(\mathbb{C})$  désignent respectivement les ensembles des matrices à  $p$  lignes et  $q$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ .
- On note  $I_p$  la matrice identité de  $M_p(\mathbb{C})$  et  $0_p$  la matrice de  $M_p(\mathbb{C})$  ne comportant que des 0.
- On note  $\chi_A$  le polynôme caractéristique d'une matrice  $A \in M_p(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire le polynôme  $\det(XI_p - A)$ .
- Étant donnée une matrice  $M \in M_p(\mathbb{C})$ , on note  $\text{Sp}(M)$  l'ensemble des valeurs propres complexes de  $M$ .

**Objectifs**

Dans la **partie I**, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la **partie I** pour résoudre, dans la **partie II**, un système différentiel.

**Partie I - Éléments propres d'une matrice****I.1 - Localisation des valeurs propres**

On considère une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ . Soient une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $A$  et un vecteur propre associé  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\}$ .

**Q20.** Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :  $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$ .

**Q21.** Soit  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|x_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j|$ . Montrer que :  $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ .

En déduire que :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels. On considère la matrice  $A_n(\alpha, \beta) \in M_n(\mathbb{R})$  définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

**Q22.** Justifier que les valeurs propres de  $A_n(\alpha, \beta)$  sont réelles.

**Q23.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A_n(\alpha, \beta)$ . Montrer que :

$$|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|$$

## I.2 - Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$

**Q24.** En utilisant la question **Q23**, montrer que pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A_n(0, 1)$ , il existe  $\theta \in [0, \pi]$  tel que  $\lambda = 2 \cos \theta$ .

On note  $U_n$  le polynôme  $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$ .

**Q25.** Établir, pour  $n \geq 3$ , une relation de récurrence entre  $\chi_{A_n(0,1)}$ ,  $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$  et  $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$ .  
En déduire, pour  $n \geq 3$ , une relation entre  $U_n$ ,  $U_{n-1}$  et  $U_{n-2}$ .

**Q26.** Montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$  :

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

**Q27.** Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de  $A_n(0, 1)$  est

$\left\{ 2 \cos \left( \frac{j\pi}{n+1} \right), j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$ . Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des espaces propres associés.

Considérons  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et posons  $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$ .

**Q28.** Montrer que pour tout vecteur propre  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  de  $A_n(0, 1)$  associé à la valeur propre  $2 \cos(\theta_j)$ , on a :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0 \\ x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0, \quad \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket. \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j)x_n = 0 \end{cases}$$

Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

**Q29.** Montrer que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  dont on précisera la dimension.

**Q30.** Déterminer l'ensemble  $F$  des suites  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E$  telles que  $u_0 = u_{n+1} = 0$ .

**Q31.** En déduire l'espace propre de  $A_n(0, 1)$  associé à la valeur propre  $2 \cos(\theta_j)$ .

**Q32.** En déduire, pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , l'ensemble des valeurs propres de  $A_n(\alpha, \beta)$  et les espaces propres associés. On distinguera le cas  $\beta \neq 0$  du cas  $\beta = 0$ .

## Partie II - Système différentiel

### II.1 - Matrices par blocs

On considère  $A, B, C, D$  des matrices de  $M_n(\mathbb{C})$  telles que  $C$  et  $D$  commutent.

**Q33.** Calculer  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$ .

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det \left( \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC) \quad (1)$$

**Q34.** Montrer l'égalité (1) dans le cas où  $D$  est inversible.

**Q35.** On ne suppose plus  $D$  inversible. Montrer qu'il existe  $p_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $p \geq p_0$ ,  $D + \frac{1}{p}I_n$  est inversible.

**Q36.** En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où  $D$  n'est pas inversible.

Considérons une matrice  $M \in M_n(\mathbb{C})$  et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

**Q37.** Montrer que  $\text{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C}; \mu^2 \in \text{Sp}(M)\}$ .

**Q38.** Soient  $\mu \in \text{Sp}(N)$  et  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\mu^2$ .

Montrer que le vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in M_{2n,1}(\mathbb{C})$  est vecteur propre de  $N$  associé à la valeur propre  $\mu$ .

**Q39.** Montrer que si  $M$  est diagonalisable et inversible, alors  $N$  est également diagonalisable et inversible.

### II.2 - Application à un système différentiel dans le cas $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad (2)$$

**Q40.** Déterminer  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier

ordre  $X' = BX$ , où  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(\alpha, \beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ .

Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de ce système ?

**Q41.** En utilisant la question **Q37**, déterminer les valeurs propres de  $B$  et en déduire que  $B$  est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

**Q42.** En utilisant la question **Q38**, déterminer une matrice inversible  $P \in M_4(\mathbb{C})$  dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que  $B = PDP^{-1}$ .

**Q43.** Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel  $Y' = DY$ , avec  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ .

**Q44.** Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions initiales  $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0)$ .