DEVOIR LIBRE 15*

Partie I

I.1) (a) Calculer $f(t) = \int_0^1 e^{-t\,s}\,ds$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

(b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

(c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

I.2) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Montrer que S est développable en série entière et donner son développement.

(b) Justifier l'égalité : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$.

I.3) (a) Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

(b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Justifier l'égalité : $\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t)\,e^{-t}\,dt$.

(c) Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que : $S(x) = R(x) + \ln x + \gamma$.

I.4) (a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t} dt$.

Pour tout $x \in]0,1[$, justifier l'existence de $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt$

et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq g_n(x) - g(x) \leq \frac{x^n}{n}$.

(b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0,1[$.

(c) En admettant que $\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$, montrer que :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

I.5) Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax) - R(bx)$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

I.6) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $R(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$, puis que $\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

(b) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ dx = 1.$$

Partie II

II.1) (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

(b) Justifier que $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire la valeur de I_n.

II.2) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré ≤ 2.
À tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe $T(P)$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt$.

(a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$.

(b) Étudier si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

II.3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leq n$. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ associant à tout polynôme P son polynôme dérivé P'.

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer des réels $b_0(x), \ldots, b_n(x)$ tels que
$P(x+t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k b_k(x)$. *Indication : on pourra citer et utiliser une formule de Taylor.*

(b) À tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on associe $T(P)$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt$.
Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait : $T(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^k(P)$.

(c) Déterminer les éléments propres de T (valeurs propres et vecteurs propres).

II.4) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et bornée. Déterminer $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\quad y' - y + g = 0$.
Justifier que la solution générale est de la forme : $\quad y : x \longmapsto k e^x + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt$, avec $k \in \mathbb{R}$.

II.5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée et soit $N_\infty(g) = \sup\left\{|g(t)|, t \in \mathbb{R}\right\}$.

(a) On définit $T_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ T_g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} g(x+t)\, dt$.
Justifier qu'alors $T_g(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} g(u)\, du$, et que T_g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en précisant $(T_g)'$ en fonction de T_g et g.

(b) En supposant g non nulle, déterminer s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T_g = \lambda g$.

(c) Montrer qu'en général, T_g est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $N_\infty(T_g)$ au moyen de $N_\infty(g)$.

(d) Montrer que si g tend vers 0 en $+\infty$, alors T_g aussi.
Indication : on vérifiera que si $|g(t)| \leq \varepsilon$ pour $t \geq A$, alors $|T_g(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \geq A$.

II.6) (a) Pour tout réel A, justifier l'existence et calculer $\int_A^{+\infty} e^{(i-1)t} dt$.

(b) Soit $c : t \longmapsto \cos(t)$, $s : t \longmapsto \sin(t)$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par (c, s). Montrer que $g \mapsto T_g$ (où T_g défini ci-dessus) définit un endomorphisme de F et écrire sa matrice N dans la base (c, s). N est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Partie III

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $\quad xy'' + y' - (x+1)y = 1.$

III.1) On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pour une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $K > 0$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq \frac{K}{n!}$.
En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r = +\infty$.

III.2) On souhaite résoudre ici cette équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$S = \left\{ y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; \forall x > 0, \quad xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1 \right\}$$

(a) Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, on pose $z(x) = e^{-x}y(x)$ pour tout $x > 0$.
Montrer que $y \in S$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x > 0, \quad xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x} \qquad (\star).$$

(b) Déterminer les $Z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \quad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0.$$

(c) Déterminer les $Z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \quad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = e^{-x}.$$

(d) En déduire l'expression des fonctions $z \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$ de **III.2.**(a), en utilisant la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$: *on utilisera* $R(x)$ *et* $R(2x)$.

(e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in S$.

III.3) (a) Sachant que $R(x) = -\ln(x) - \gamma + o(1)$ quand $x \to 0$ avec $x > 0$, déterminer les solutions $y \in S$ ayant une limite finie en 0.
Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie **I** et reliée à R par :
$S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma \quad$ pour $x > 0$ (vu en **I.3.)**(c)).

(b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question **III. 1)** : on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comment pourrait-on alors obtenir une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de **III. 1)** ?