DEVOIR LIBRE 14-14*

Exercice

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$.

1. Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.

2. Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X \geq i) \leq \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.
   Que peut-on en déduire pour la série de terme général $\mathbb{P}(X \geq i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?

3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$
   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{i\geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n,k} = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq K$, on a : $R_{n,k} \leq \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{k^i}$.

4. (a) Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $\mathbb{P}(X \geq k) \leq \dfrac{k}{k-\lambda}\mathbb{P}(X = k)$.

   Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $\mathbb{P}(X > k) \leq \mathbb{P}(X = k)$.

   (b) Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

   Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sum\limits_{i=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq i) \leq 1$.

   (c) Dans le cas général, que vaut $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq i)$? Le justifier.

5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leq e^{-t}$.

   (b) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \dots,\ n\}$, $\dbinom{n}{k} \leq \dfrac{n^k}{k!}e^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.

   (c) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \dots,\ n\}, \mathbb{P}(Y = k) \leq \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}e^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda+1-k)}{2n}$.

   (d) Quelle majoration de $\mathbb{P}(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$?

   (e) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$: $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(Y = j) \leq \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Problème

Notations et définitions

- $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- On identifie un élément de $x \in \mathbb{K}^n$ à une matrice colonne et si $x = (x_1, \dots, x_n)$, on note $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$.
- Une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est dite convergente si toutes les suites coordonnées $(M_p(i,j))_{p\in\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ convergent. La limite est alors l'élément de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les limites des suites coordonnées.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on note

  $$\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

  Cette quantité s'appelle le rayon spectral de A.
- Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi P_X de X au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

1 Cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et, pour $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on note :

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Il pourra être utile de noter $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$.

1.1 Puissances de $A(\alpha, \beta)$

1. Montrer que 1 est valeur propre de $A(\alpha, \beta)$ et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Montrer que $A(\alpha, \beta)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.
3. Calculer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la matrice $A(\alpha, \beta)^p$.
4. Montrer que, pour $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$, la suite $(A(\alpha, \beta)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha, \beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$?

1.2 Applications

Soient α et β deux réels de $]0,1[$. Un message binaire de longueur ℓ, c'est à dire une suite finie $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ $a_i \in \{0,1\}$, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose que, à chaque relais, un élément $x \in \{0,1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On note X_0 la variable aléatoire définissant le message initial de longueur ℓ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au n-ième relais, le résultat du transfert est noté X_n. On suppose que les relais sont indépendants les uns des autres et que les erreurs sur les bits constituant le message sont indépendantes.

5. **Cas $\ell = 1$**
   Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:
   $$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$
   calculer, pour $n > 0$, $\mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)$.
   Si $r = \min\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$, montrer que la probabilité pour que X_n soit conforme à X_0 est supérieure ou égale à
   $$r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n$$

6. **Cas $\ell >= 1$**
   On pose $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^\ell)$ où, pour $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, X_n^k est le résultat de la transmission du k-ième bit au n-ième relais. Soit Q_n la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial. Montrer que Q_n vérifie :
   $$Q_n \geq (r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n)^\ell$$

7. On suppose dans cette question que $\alpha = \beta$. Que peut-on dire dans ce cas de l'inégalité précédente ?
   Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, déterminer un entier n_c tel que la probabilité d'obtenir un message erroné au n-ième relais pour $n \geq n_c$ soit supérieure ou égale à ε (on dit que n_c est la taille critique du réseau).

2 Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique (respectivement strictement stochastique) si et seulement si elle est à coefficients positifs (respectivement strictement positifs) et
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

2.1 Coefficients

8. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique). Montrer que pours tous i, j compris entre 1 et n on a
   $$0 \leq a_{i,j} \leq 1 \quad (\text{respectivement } 0 < a_{i,j} < 1)$$

9. Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre associé.

10. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques (respectivement strictement stochastiques) est une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique).

2.2 Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

11. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

12. Montrer que $\rho(A) = 1$.

2.3 Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que
$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

14. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

2.4 Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

15. On désigne par $A_1 = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de $A - I_n$?

16. Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.

17. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.