DEVOIR LIBRE 13*

Etude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On étudie une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui modélise la trajectoire d'une particule. On s'intéresse en particulier au temps nécessaire pour que la particule revienne pour la première fois à son point de départ, si cela arrive. Pour cela, on introduit une suite de nombres appelés nombres de Catalan et on étudie leurs propriétés.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = 1 - p, \qquad \text{où } p \in]0, 1[.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise la trajectoire aléatoire dans $\mathbb{Z}$ d'une particule située en $S_0 = 0$ à l'instant initial $n = 0$, et faisant à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ un saut de $+1$ avec une probabilité p et de -1 avec une probabilité $1 - p$, les sauts étant indépendants et p appartenant à $]0, 1[$.
Pour $\omega \in \Omega$, on représente la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(n, S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$.

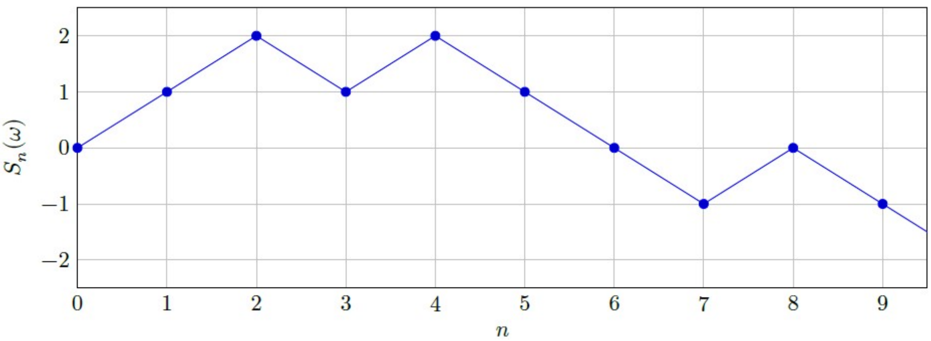

FIGURE 1 – Exemple de trajectoire possible

A - Espérance et variance de S_n

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul.
Soit Y_n la variable aléatoire sur Ω égale au nombre de valeurs de $k \in [\![1, n]\!]$ telles que $X_k = 1$.

1. Quelle est la loi de Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2. Quelle relation a-t-on entre S_n et Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de S_n. Justifier que S_n et n ont même parité.

B - Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur m tout m-uplet $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ tel que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\gamma_i \in \{-1, 1\}$.

On pose alors $s_\gamma(0) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $s_\gamma(k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$.

On représente le chemin γ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(k, s_\gamma(k))_{k \in [\![0,m]\!]}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

— on appelle chemin de Dick de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ de longueur $2n$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $s_\gamma(k) \geq 0$;

— on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

On convient de plus que $C_0 = 1$.

La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.

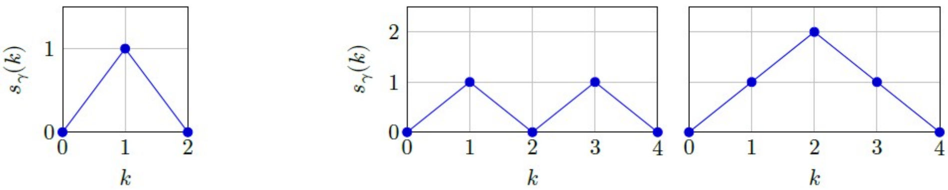

FIGURE 2 – Représentation des chemins de Dyck de longueurs 2 et 4

3. Donner sans démonstration la valeur de C_3 et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n + 2$. Soit $r = \max\{i \in [\![0, n]\!] : s_\gamma(2i) = 0\}$.

On suppose $0 < r < n$ et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, \ldots, \gamma_{2n+1})$.

4. Justifier que $\gamma_{2r+1} = 1$, $\gamma_{2n+2} = -1$ et que α et β sont des chemins de Dyck.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ un chemin de longueur m.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $A_{t,\gamma}$ l'événement : « pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $X_{t+k} = \gamma_k$ » ; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^{m} (X_{t+k} = \gamma_k).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ un chemin de Dyck de longueur $2n$. Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer $P(A_{t,\gamma})$ en fonction de n et p.

Soit T la variable aléatoire, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine :

$$\forall w \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ S_k(\omega) \neq 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N}^* : S_k(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

6. Montrer que T prend des valeurs paires et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(T = 2n + 2) = 2C_n p^{n+1}(1 - p)^{n+1}.$$

C - Série génératrice des nombres de Catalan

7. En utilisant la question 4, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}.$$

8. A l'aide de la variable aléatoire T, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{C_n}{4^n}$ converge.
9. En déduire que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} C_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

On pose alors, pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \quad \text{et} \quad g(t) = 2tf(t).$$

On rappelle que la série génératrice de T, donnée par $G_T(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(T = n)t^n$, est définie si $t \in [-1, 1]$.

10. A l'aide des questions précédentes, exprimer G_T à l'aide de g et de $P(T = 0)$.
11. En déduire que, si $p \neq \frac{1}{2}$, alors T admet une espérance.
12. Montrer que $\forall t \in I$, $g(t)^2 = 2g(t) - 4t$.
13. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t}.$$

14. Montrer que ε est continue sur $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$. En déduire

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t}.$$

15. En déduire que $P(T \neq 0) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1 - p)}$. Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.
16. Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, alors T n'admet pas d'espérance.

D - Expression des nombres de Catalan et équivalent

17. Justifier l'existence d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sqrt{1 + x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$

    et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n à l'aide d'un coefficient binomial.
18. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
19. Rappeler l'équivalent de Stirling. En déduire un équivalent de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.
20. A partir de la question précédente, retrouver le résultat des questions 11 et 16.