

## DL12\*

Dans ce problème, une série de fonctions  $L_a$  est une série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} (x \mapsto a_n \frac{x^n}{1-x^n})$  où  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite de réels telle que la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  soit de rayon 1. On pourra noter  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  la série de fonctions, au lieu de  $\sum_{n \geq 1} (x \mapsto a_n \frac{x^n}{1-x^n})$ .

### Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions  $L_a : \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$

1. Soit  $x \in ]-1, 1[$ , donner un équivalent de  $1-x^n$  pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$ .

Démontrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  converge absolument.

Remarque : la série  $L_a$  peut parfois converger en dehors de l'intervalle  $] - 1, 1[$ . Donner un exemple de suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  telle que la série  $L_a$  converge en au moins un point  $x_0$  n'appartenant pas à l'intervalle  $] - 1, 1[$ .

2. Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  converge uniformément sur tout segment  $[-b, b]$  inclus dans l'intervalle  $] - 1, 1[$ .

3. On pose, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ .

Justifier que la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $] - 1, 1[$  et démontrer ensuite que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $] - 1, 1[$ . Donner la valeur de  $f'(0)$ .

4. Expression sous forme de série entière.

On note  $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

Lorsque  $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$  est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right) \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la famille  $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$  est sommable.

En déduire que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$  où  $b_n = \sum_{d|n} a_d$ .

( $d|n$  signifiant  $d$  divise  $n$ ).

## Partie II - Exemples

5. Dans cette question, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = 1$  et on note  $d_n$  le nombre de diviseurs de  $n$ . Exprimer pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  comme la somme d'une série entière.

6. Dans cette question, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = \varphi(n)$  où  $n$  est le nombre d'entiers naturels premiers à  $n$  et inférieurs à  $n$ .

Justifier que la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  est de rayon 1.

On admet que pour  $n \geq 1$ ,  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ . Vérifier ce résultat pour  $n = 12$ .

Pour  $x \in ]-1, 1[$ , exprimer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$  sous forme d'un quotient de deux polynômes.

7. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$ , la valeur de la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

8. Dans cette question et la suivante, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = (-1)^n$  et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

En utilisant le théorème de la double limite calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  et donner un équivalent de  $f(x)$  au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question 3.

9. Démontrer qu'au voisinage de 1,  $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$ .

On pourra remarquer que pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$ .