DL11*

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note :

• $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et 1 colonne.

• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles à n lignes et n colonnes.

• $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.

• I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXSX \geq 0.$$

• $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^tXSX > 0.$$

Le but du problème est d'introduire et d'étudier la notion de racine carrée d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que R est une racine carrée de A si $R^2 = A$.
La première partie propose de montrer qu'une matrice donnée peut admettre une infinité de racines carrées ou n'en avoir aucune. La seconde partie montre l'existence et l'unicité d'une racine carrée symétrique positive de A lorsque A est symétrique positive et introduit la notion de valeur absolue d'une matrice symétrique réelle. Enfin la dernière partie est consacrée à l'étude d'un algorithme de calcul de la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive.

Partie I

Pour a réel, soit M_a la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix}$$

et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M_a.

1. Déterminer suivant les valeurs de a, le rang de la matrice $M_a - (1+3a)I_3$. Quelle valeur propre de M_a met-on ainsi en évidence ? Préciser la dimension du sous-espace propre associé.
2. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M_a, puis déterminer les valeurs propres de M_a.

3. (a) Montrer que pour tout réel a, M_a est trigonalisable.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable.
4. Dans cette question, on suppose $a = 1$.
   (a) Déterminer P inversible et D diagonale dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}M_1P = D$, puis déterminer une racine carrée de M_1.
   (b) Montrer que ma matrice $m = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) En déduire que M_1 admet une infinité de racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Dans cette question, on suppose $a = 0$ et on pose $N = M_0 - I_3$. Calculer N^2 et en déduire l'existence de α et β réels tels que $\alpha I_3 + \beta N$ soit une racine carrée de M_0 dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
6. Dans cette question, on suppose $a = -\frac{1}{3}$ et on note $u = f_{-\frac{1}{3}}$.
   (a) Déterminer tous les éléments $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $M_{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit
   $$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) Déterminer les matrices commutant avec U. En déduire que U ne possède pas de racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (d) La matrice $M_{-\frac{1}{3}}$ possède-t-elle une racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Partie II

1. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n réels distincts deux à deux et φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :
   $$\varphi \ : \ Q \mapsto (Q(a_1), Q(a_2), \ldots, Q(a_n)).$$
   (a) Montrer que φ est une application linéaire injective.
   (b) En déduire que quels que soient les réels b_1, b_2, $\ldots, b_n$, il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant :
   $$Q(a_1) = b_1, Q(a_2) = b_2, \ldots, Q(a_n) = b_n.$$
2. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables et vérifiant $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Démontrer, sans se contenter d'énoncer le résultat du cours, que tout sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) Soient λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f et E_{λ_1}, $E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres de f respectivement associés. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on note g_i l'endomorphisme de E_{λ_i} induit par g. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de g. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les matrices de f et g dans cette base soient toutes deux diagonales.
3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables et vérifiant $AB = BA$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.
4. **(Question de cours...)** Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que S est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

(b) Montre de même que S est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

5. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, les valeurs propres deux à deux distinctes de S.

   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à $p-1$ vérifiant : $\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}, Q(\lambda_k) = \sqrt{\lambda_k}$.

   (b) Montrer que $Q(S)$ est symétrique positive.

   (c) Montrer que $(Q(S))^2 = S$.

   (d) On souhaite montrer l'unicité d'une matrice symétrique positive qui soit une racine carrée de S. Soit donc $T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$.
   Montrer que T commute avec S puis avec $Q(S)$ et conclure.
   L'unique matrice symétrique positive racine carrée de S est alors notée $\sqrt{S}$.

   (e) Dans cette question, on suppose que S admet seulement deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Montrer que :
   $$\sqrt{S} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}[S + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} I_n].$$

6. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $S^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note alors $|S| = \sqrt{S^2}$ et cette matrice est appelée valeur absolue de la matrice S.

   (b) Montrer que les matrices $|S| + S$ et $|S| - S$ sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

   (c) Soit $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $|S_1|$ et $|S_2|$.

PARTIE III

Soit a un réel strictement positif. On considère les deux suites réelles $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $a_0 = a$ et $b_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right), \qquad b_{k+1} = \frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right).$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k > 0$ et $b_k > 0$.

2. On définit les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = a_k b_k$ et $v_k = \frac{a_k}{b_k}$.

   (a) Etudier la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   (b) Etablir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   (c) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, $u_k \geq 1$.

   (d) Etudier la convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3. Déduire des questions précédentes que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser leurs limites respectives.

4. (a) Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible.

   (b) Montrer que l'inverse d'une matrice symétrique définie positive est symétrique et définie positive.

   (c) Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est symétrique définie positive.

5. Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On considère les deux suites de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $A_0 = A$, $B_0 = I_n$ et les relations de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + B_k^{-1}), \qquad B_{k+1} = \frac{1}{2}(B_k + A_k^{-1}).$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont symétriques définies positives.

6. Soit D diagonale et P orthogonale telle que $A = PDP^{-1}$.
   (a) Montrer que D est symétrique définie positive.
   (b) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D_k = P^{-1}A_kP$ et $\Delta_k = P^{-1}B_kP$. Montrer que les matrices D_k et Δ_k sont des matrices diagonales inversibles vérifiant :

$$D_0 = D, \quad \Delta_0 = I_n, \qquad D_{k+1} = \frac{1}{2}(D_k + \Delta_k^{-1}), \quad \Delta_{k+1} = \frac{1}{2}(\Delta_k + D_k^{-1}).$$

   (c) Montrer que les suites $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs limites.

7. (a) Montrer que l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui même qui à M associe PMP^{-1} est continue.
   (b) En déduire que les suites $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont aussi convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs limites.