DEVOIR LIBRE 1

Exercice 1
Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites définies par :

$$u_1 = 1,\ v_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Vérifier que $u_2 = \frac{1}{3}$ et $v_2 = \frac{4}{3}$, puis calculer u_3 et v_3.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont décroissantes et convergentes.
4. On pose ℓ la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$ et ℓ' celle de $(v_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 1}$ est constante et en déduire une relation entre ℓ et ℓ'.
   (b) En utilisant la relation $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$, trouver une autre relation entre ℓ et ℓ'.
   (c) En déduire les valeurs de ℓ et ℓ'.

Exercice 2
Déterminer la nature des séries suivantes, dont on donne le terme général.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $u_n = \ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{n^2}{2^n+n}$, 4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Exercice 3
Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 3} u_n$, après avoir montré sa convergence, avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3, \qquad u_n = \frac{2n-1}{n^3 - 4n}.$$

Exercice 4
On définit (u_n) par $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.