DEVOIR LIBRE 1

Exercice 1

1. Soient $Z_1 = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $Z_2 = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$.

   (a) Calculer le module et un argument de Z_1, Z_2 et $\frac{Z_1}{Z_2}$.

   (b) Calculer le nombre complexe $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme cartésienne.

   (c) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Trouver les nombres complexes x et y vérifiant $x+y = 2+3i$ et $xy = -1+3i$.

3. Soient x et y deux nombres réels compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et vérifiant $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

   (a) Montrer que $\frac{\pi}{2} < x+2y < \frac{5\pi}{4}$.

   (b) Calculer $\tan(x+2y)$.

   (c) En déduire la valeur de $x+2y$.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $2^{(x^3)} = 3^{(x^2)}$,

2. $2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \cdots + 3^{x+n}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Résoudre l'équation d'inconnue réelle x,

$$\mathrm{Arccos}(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right).$$

Problème

Pour tout entier naturel non nul, on note f_n la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_n(x) = x - n \ln x.$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. **Etude de la suite (u_n).**

   (a) Montrer que $1 < u_n < e$ pour tout entier $n \geq 3$.

   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ pour tout entier $n \geq 3$, puis conclure que $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge, puis montrer que la limite de (u_n) est 1.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3. **Etude de la suite (v_n).**

   (a) Déterminer le comportement de (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) Calculer $f_n(n \ln n)$ puis montrer que $v_n > n \ln n$ pour tout entier $n \geq 3$.

   (c) Soit g la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - 2\ln x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier g et donner son signe. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2\ln n$.

   (d) En déduire le signe de $f_n(2n \ln n)$ puis établir que $n \ln n < v_n < 2n \ln n$ pour tout entier $n \geq 3$.

   (e) Montrer enfin que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$.