DEVOIR LIBRE 1

Problème

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

4. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

6. Montre que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (donner sa valeur).

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$ pour un certain a_n que l'on explicitera en fonction de n.

8. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$.

   (b) Calculer la limite des suites de terme général : $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ et nI_n^2.

   (c) Donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

9. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

   (b) En déduire un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   (c) Donner la nature des séries de terme général :

   (i) a_n (ii) $\frac{a_n}{4n+1}$ (iii) $(-1)^n a_n$ (iv) $\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = I_{2n}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)dt$.

   (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{2n+1} J_{n+1} - \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t)dt$$

   (b) En déduire :

   $$J_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}$$

   puis :

   $$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = -\frac{2}{(2n+2)^2}$$

   (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de S_n en fonction de $\frac{J_n}{W_n}$ et $\frac{J_0}{W_0}$.

3. (a) Expliquer rapidement pourquoi, pour tout $t \in [0, \pi/2], t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) = \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}.$$

   Conclure que la série de terme général $\frac{1}{p^2}$ est convergente et donner la valeur de $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S'_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$. Exprimer S'_{2n+1} en fonction de S_n et de S_{2n+1}.

   (d) Pourquoi la suite (S'_n) est-elle convergente ? En déduire que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie III

1. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall q \in \mathbb{N}^*, |\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{q}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}| \leq \frac{x^{q+1}}{q+1}.$$

   (b) Conclure que si $x \in [0,1]$, la série de terme général $(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}$ est convergente et expliciter la valeur de : $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}$.

2. Soit $\varphi :]0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

   (a) Montrer que φ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ en une fonction qui sera encore notée φ.

   (b) En utilisant la fin de la Partie II et ce qui précède, donner la valeur de $\int\limits_0^1 \varphi(x)dx$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$n\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}n}{p(np+1)}$$

   (d) Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}n}{p(np+1)} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}| \leq \frac{C}{n}$$

   (e) Conclure que $\int\limits_0^1 \ln(1+x^n)dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $u_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) converge vers 1.

   (b) Calculer $\int\limits_0^1 \ln(1+x^n)dx$ en fonction de n et de u_n.

   (c) En déduire que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$