DEVOIR LIBRE 1*

Problème

- On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathcal{P} = \{P = (p_n,\ n \geq 0) /\ \forall n \geq 0,\ p_n \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1\}$$

- Pour $P, Q \in \mathcal{P}$, on définit

$$\mathrm{dist}(P,Q) = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) q_n \right|$$

où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n \in A} p_n$.

- Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est à dire une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1 Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite
$$c \frac{\lambda^n}{n!},\ n \geq 0$$
appartienne à $\mathcal{P}$.

2. Soient p, q deux réels de $[0,1]$. Calculer
$$\mathrm{dist}\left((1-p, p, 0, \dots), (1-q, q, 0, \dots)\right)$$

3. Soient $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)p_n,\ n \geq 0)$ est convergente.

2 Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)},\ n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série de terme général $(n f(n) p_n^{(\lambda)},\ n \geq 0)$ est convergente.

5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)} \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\ n \geq 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) q_n$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = \mathcal{P}_\lambda$.

3 Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k) p_k^{(\lambda)} \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} \tag{3}$$

8. Pour $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$, établir l'identité suivante

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction de $\mathcal{S}_h$ est bornée.

4 Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la fonction Δf définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

On veut montrer que pour $f \in \mathcal{S}_h$,

$$\sup_{n \geq 1} |\Delta f(n)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right) \tag{5}$$

Pour un entier $m \geq 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \ \text{ et } \ h(n) = 0 \ \text{ si } \ n \neq m$$

On note f_m l'un des éléments de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10. Etablir pour $1 \leq n \leq m$ l'identité suivante :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

11. Etablir une identité analogue pour $n > m \geq 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geq 1$.

12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbb{N} \setminus \{0, m\}$. *Indication* : on distinguera les cas $1 \leq n < m$ et $n > m \geq 0$.

13. Etablir les identités suivantes :

$$\Delta f_0(0) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - f_0(0),\ \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right) \quad \text{pour} \quad m > 0$$

14. En déduire que

$$\sup_{n\geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{n\in\mathbb{N}} h(k)$$

15. Montrer que $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}$.
16. Montrer que la série

$$\sum_{m\geq 0} h_+(m) f_m(n)$$

est convergente pour tout entier $n \geq 1$.

17. Montrer que la fonction f définie pour tout $n \geq 1$ par

$$f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

appartient à $\mathcal{S}_h$.

18. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbb{N}} h(k)\right)$$

En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - h$, on prouverait de façon analogue que pour tout entier $n \geq 1$,

$$-(f(n+1) - f(n)) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbb{N}} h(k)\right)$$

et qu'ainsi l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.