EXERCICES DIVERS POSES A L'ORAL 2018

Planche 1 ICNA Emeric Courtade

1. Avec préparation. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E_0) \quad (x^2-1)y''(x) - 2pxy'(x) + p(p+1)y(x) = 0.$$

   (a) Ecrire les trois premières dérivées (E_1), (E_2) et (E_3) de (E_0). Quelle est la forme de (E_k) pour $k \in \mathbb{N}$?

   (b) En déduire la forme des solutions générales de (E_0).

2. Sans préparation. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $B = A + I_4$. On donne $\mathrm{Sp}(B) = \{0, 4\}$.
   Trouver les valeurs propres de A et leur ordre de multiplicité, sans utiliser le polynôme caractéristique, on attend deux méthodes pour l'obtention des ordres de multiplicité.

Planche 2 École Navale Louis Augereau

On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
Déterminer les extrema de f sur le rectangle $U = [0, 3] \times [1, 5]$?

Planche 3 TPE-EIVP Marius Duvillard

1. Soient E un espace-vectoriel de dimension $n \geq 2$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E stable par u.

   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Im(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E) \subset H$.

   (b) En déduire que $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

2. On note (E) l'équation différentielle $x(x+1)y'' - (4x+1)y' + 6y$.

   (a) Préciser la forme de l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que φ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si la dérivée de $\psi : x \mapsto \frac{1}{x^2}\varphi(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qu'on déterminera.

   (c) On note (E_1) l'équation différentielle $x(x+1)z' + 3z = 0$. Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (d) Résoudre finalement (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Planche 4 ENSEA Camille NEAU

1. On s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(n!)^2}$.
   (a) Trouver le rayon de convergence de cette série entière. On note J sa somme.
   (b) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, montrer que $J(t) \geq 1$.
   (c) Pour tout $t \in [-1, 0]$, montrer que $1 + t \leq J(t) \leq 1$.
   (d) Montrer que $J(t) - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$.
   (e) Montrer que J est solution sur $\mathbb{R}$ de $ty'' + y' - y = 0$.
2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A^2 + B^2 = 2I_n$ et $A + B = 2I_n$.
   Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Planche 5 TPE-EIVP Emeric Courtade

1. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
   $$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5.$$
   (b) En déduire les valeurs de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
2. Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)dt = 1.$$

Planche 6 TPE-EIVP Ludovic Liberpré

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n s'exprime comme une combinaison linéaire de A et A^2 dont on exprimera les coefficients.
2. On s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}$.
   (a) Trouver son rayon de convergence.
   (b) On note f sa somme. Pour $x \in]-R, R[$, calculer $(4x - 1)f'(x) - 2f(x)$ et exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
3. Bonus. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n. Soit X une partie dense de E ($\overline{X} = E$). Soit f une fonction continue de E vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) = 0$. Montrer que pour tout $x \in E$, $f(x) = 0$.

Planche 7 TPE-EIVP Alexandre Coste

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $L_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]\,;\, P \mapsto XP'' + (X-4)P' - 3P$.
   (a) Montrer que $L_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
   (b) L'endomorphisme L_n est-il diagonalisable ?
   (c) Donner la dimension et une base du noyau de L_n.

Planche 8 TPE-EIVP Théo Letessier

1. On note $f :]-1,1[\to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Déterminer une équation différentielle du premier ordre qui est vérifiée par f.
   (b) Développer f en série entière.
2. Soit $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
   $$\psi(M) = \text{Tr}(AM).$$
   On pourra poser $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})\,;\, A \mapsto (M \mapsto \text{Tr}(AM))$.

Planche 9 École Navale Paul Marcillat

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\text{Tr}(M) = n$.
2. On définit la suite (a_n) par $a_0 = a_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$ $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.
   (b) Déterminer le rayon R de la série entière $\sum a_n x^n$. On note S sa somme.
   (c) Soit $x \in]-R, R[$. Montrer que S est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
   (d) Déterminer S à l'aide des fonctions usuelles.

Planche 10 ENSEA Hugo Steiger

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et q, et W un sous-espace vectoriel de E, de dimension n.
   On note A l'ensemble des applications linéaires de E dans F telles que W soit contenu dans leurs noyaux.
   (a) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
   (b) Déterminer la dimension de A.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^a} dx$.
   (a) Déterminer la nature de $I(a)$ en fonction de a.
   (b) Calculer $I(2)$ et $I(3)$.

Planche 11 ESM Saint-Cyr Louis Augereau

1. (Énoncé originel) On pose $A = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 23 & 8 & 5 \\ 8 & 23 & 8 \\ 5 & 8 & 20 \end{pmatrix}$ et (E) : $X' + AX = 0$.
   (a) Déterminer la limite de X au voisinage de $+\infty$.
   (b) Résoudre (E).
2. (Énoncé modifié.) On pose $A = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 23 & 8 & 5 \\ 8 & 23 & 8 \\ 5 & 8 & 23 \end{pmatrix}$ et (E) : $X' + AX = 0$.
   (a) Déterminer la limite de X au voisinage de $+\infty$.
   (b) Résoudre (E).
3. On note $f : x \mapsto x - \cos(x)$.
   (a) Tracer le graphe de f avec l'aide de `Python`.
   (b) Résoudre $f(x) = 0$ avec une fonction reposant sur une dichotomie, et une erreur plus petite que 10^{-4}.
   (c) Même question avec la méthode de Newton.
   (d) Commenter.