EXERCICES DIVERS POSES A L'ORAL 2017

Planche 1 ENSEA
Etudier l'existence d'une fonction continue f telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \exp(f(z)) = z$$

Solution 1 Il s'agit de voir s'il existe un logarithme complexe. La réponse est négative car il y a un problème de raccord pour l'argument.
Supposons, par l'absurde, que f existe. On a en particulier

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(f(e^{it})) = e^{it}$$

ce que l'on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp\left(f(e^{it}) - it\right) = 1$$

Comme $e^z = 1$ équivaut à $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$, on peut ainsi affirmer que $g\ :\ t \mapsto \frac{f(e^{it})-it}{2i\pi}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Mais c'est une fonction continue et le théorème des valeurs intermédiaires nous amènerait une contradiction si g n'était pas constante. Comme $g(0) \neq g(2\pi)$, on obtient une contradiction.

Planche 2 Navale

1. On pose $A = X^4 + 1$ et $B = X^4 + X$. On considère l'application f qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\, dt$.

Solution 2

1.
   (a) Le reste dans la division euclidienne par B étant dans $\mathbb{R}_3[X]$ (le reste est de degré $< 4 = \deg(B)$), f va de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui même.
   Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$. La division euclienne de AP_i par B s'écrit

   $$AP_i = Q_i \cdots B + f(P_i)$$

   On a donc

   $$A(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda Q_1 + Q_2) \cdot B + \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

   Comme $\lambda f(P_1) + f(P_2) \in \mathbb{R}_3[X]$, ceci est une division euclidienne et

   $$\lambda f(P_1) + f(P_2) = f(\lambda P_1 + P_2)$$

   f est ainsi linéaire. Finalement, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

(b) On a

$$A = B - X + 1,\ AX = X(X^4 + X) - X^2 + X$$
$$AX^2 = X^2(X^4 + X) - X^3 + X^2,\ AX^3 = (X^3 - 1)(X^4 + X) + X^3 + X$$

ceci nous donne les images des vecteurs de la base canonique et donc la matrice qui est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) On a (développement par rapport à la première ligne puis remplacer C_1 par $C_1 + C_2 + C_3$ et développer par rapport à la première colonne)

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

M est ainsi inversible et donc

$$\ker(f) = \{0\},\ \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_3[X]$$

2. $t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0,1[$. En 0, elle est équivalente à $\frac{-t^2}{t^2} = -1$ et donc prolongeable par continuité et donc intégrable. En 1, elle équivaut à $\ln(1-t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t) \sim \ln(1-t) = o(1/\sqrt{1-t})$ et elle est aussi intégrable.
La fonction est intégrable sur $]0,1[$ et a fortiori, son intégrale existe sur cet intervalle. On procède par intégration par parties pour le calcul. On primitive $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ en $u(t) = -\frac{1}{t}$ et on dérive $v(t) = \ln(1-t^2)$ en $v'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$. Comme uv n'admet pas une limite finie en 1, on doit revenir à des bornes flottantes. Sur $[a,b] \subset]0,1[$, u et v sont de classe C^1 et

$$\int_a^b \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t}\right]_a^b - \int_a^b \frac{2}{1-t^2}\,dt$$

Comme $\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$, on a finalement

$$\int_a^b \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t} + \ln(1-t) - \ln(1+t)\right]_a^b$$

Quand $a \to 0$, le terme dans le crochet est de limite nulle (on a $\ln(1-t^2) \sim -t^2$).
Par ailleurs,

$$-\frac{\ln(1-t^2)}{t} - \ln(1-t) + \ln(1+t) = \left(-1 - \frac{1}{t}\right)\ln(1+t) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)\ln(1-t)$$

Le second terme du membre de droite est de limite nulle quand $t \to 1$ (car $x\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$). Le premier tend vers $-2\ln(2)$.
Le passage à la limite donne donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = -2\ln(2)$$

Planche 3 TPE

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.
   (c) Calculer α_n et β_n.
2. On considère la fonction $f \ : \ x \mapsto \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^x}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur D et exprimer $f'(x)$ sous forme d'une intégrale.
   (c) Donner les variations de f à l'aide d'une relation de Chasles et d'un changement de variable.

Solution 3

1. (a) Un calcul simple montre que
$$A^2 = 2I_3 + A$$
   (b) $X^2 - X - 2$ annule A. La division euclidienne de X^n par ce polynôme s'écrit
$$X^n = (X^2 - X - 2)Q_n + \alpha_n X + \beta_n$$
   En appliquant cette identité polynomiale en A, on trouve
$$A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n I_3$$
   (c) En donnant à X les valeurs -1 et 2 dans l'égalité polynomiale, on trouve $(-1)^n = -\alpha_n + \beta_n$ et $2^n = 2\alpha_n + \beta_n$. On en déduit α_n et β_n et
$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{2} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$$
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $g \ : \ t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Il y a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$.
   Au voisinage de 0 : g est prolongeable par continuité en 0 (valeur 1 si $x > 0$, 1/2 si $x = 0$ et 0 si $x < 0$). Il ya donc toujours intégrabilité.
   Au voisinade de $+\infty$: si $x \leq 0$ alors g est de limite finie non nulle en $+\infty$ et donc non intégrable. Si $x > 0$ alors $g(t) \sim 1/t^x$ est intégrable ssi $x > 1$.
   Comme g est positive, l'intégrabilité équivaut à l'existence de l'intégrale et
$$D =]1, +\infty[$$
   (b) On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
   $\forall x > 1, \ t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   $\forall t > 0, \ x \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}$.
   $\forall x > 1, \ t \mapsto -\frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   $\forall [a, b] \subset]1, +\infty[, \ \forall x \in [a, b], \ \forall t > 0,$
$$\left| -\frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \right| \leq \frac{|\ln(t)|}{1+t^x} \leq \frac{|\ln(t)|}{1+t^x} \leq \varphi(t) = \begin{cases} |\ln(t)| & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{|\ln(t)|}{1+t^a} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

φ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est négligeable au voisinage de 0 devant $1/\sqrt{t}$ (croissances comparées) et est donc intégrable au voisinage de 0. On a $t^{\frac{1+a}{2}}\varphi(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ (croissances comparée avec $a-1>0$) et φ est donc intégrable au voisinage de $+\infty$.
Le théorème s'applique. Il donne $f \in C^1(]1,+\infty[)$ et

$$\forall x > 1,\ f'(x) = -\int_0^\infty \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\, dt$$

(c) Le changement de variable $u = 1/t$ (licite puisque $t \mapsto 1/t$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ à dérivée ne s'annulant pas) donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\, d = -\int_0^1 \frac{u^{x-2}\ln(u)}{(u^x+1)^2}\, du$$

En appliquant la relation de Chasles à $f'(x)$ et en regroupant les morceaux, on obtient donc

$$f'(x) = -\int_0^1 \frac{(u^{x-2}-u^x)\ln(u)}{(u^x+1)^2}\, du$$

Quand $u \in]0,1[$, le terme sous l'intégrale est positif (car $x-2 \leq x$) et l'intégrale est positive. Ainsi f' est négative et f décroît sur $]1,+\infty[$.

Planche 4 TPE

1. Soit (E) $x^2y'' - 4xy' + (x^2+6)y = 0$.
   (a) Donner les solutions de (E) développables en série entière.
   (b) A-t-on trouvé toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose alors $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$. On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que $\mathbb{P}(X_1=-1)=p$ et $\mathbb{P}(X_1=1)=1-p$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
   (b) Quelle est la loi de Z_n ?
   (c) Oublié.

Solution 4

1. (a) Soit f une solution de (E) développable en série entière. On note $R>0$ son rayon de convergence et pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 4na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} 6a_n x^n.$$

On fait un changement d'indice dans la troisième somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)-4n+6)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n = 0.$$

L'unicité du développement en série entière donne $a_0 = a_1 = 0$ et pour $n \geq 2$

$$(n^2-5n+6)a_n = -a_{n-2}$$

et donc pour $n \geq 4$

$$a_n = \frac{-1}{(n-2)(n-3)} a_{n-2}.$$

On vérifie alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!} a_2 \qquad \text{et} \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} a_3.$$

Réciproquement, si on définit de telles suites, on vérifie que pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!} x^{2n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n+1}$ convergent absolument pas la règle de d'Alembert (pour $x \neq 0$ et de manière évidente pour $x = 0$). Donc ce sont deux séries entières de rayon $+\infty$ et en remontant les calculs précédents, f définie par $x \mapsto a \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!} x^{2n} + b \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n+1}$ est bien solution de (E) développable en série entière, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a bien ainsi obtenu toutes les solutions développables en série entière. On reconnaît, comme ensemble de ces solutions, le sous espace vectoriel engendré par $x \mapsto x^2 \cos x$ et $x \mapsto x^2 \sin x$, noté $\mathcal{P}$.

(b) On vient de trouver un plan inclus dans l'ensemble des solutions.
Le coefficient devant y'' s'annulant en $x = 0$. On va procéder par recollement.
Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est un plan vectoriel. Comme les restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ des élements de $\mathcal{P}$ forment un plan vectoriel et que ce sont des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, on a toutes les solutions. Il existe donc A et B dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^2(A \cos x + B \sin x)$.
De la même manière, il existe C et D réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = x^2(C \cos x + D \sin x)$.
L'équation évaluée en 0 donne $f(0) = 0$.
Réciproquement, soit f une fonction définie comme précédemment. Elle est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Elle est clairement continue en 0. Elle est aussi clairement dérivable en 0 et de dérivée nulle en 0 (le taux d'accroissement converge vers 0 en 0^+ et en 0^-). Un calcul de $f'(x)$ pour x différent de 0 montre que f' est continue sur $\mathbb{R}$.
On montre ensuite que $f''(x)$ converge vers $2A$ en 0^+ et vers $2C$ en 0^-. Le corollaire du théorème des accroissements finis donne f' dérivable à droite et à gauche en 0 de dérivée à droite $2A$ et de dérivée à gauche $2C$. f' est donc dérivable en 0 si et seulement si $A = C$.
L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\left\{ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid \exists (A, B, D) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^2(A \cos x + B \sin x),\ f(0) = 0 \text{ et} \right.$$
$$\left. \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = x^2(A \cos x + D \sin x \right\}.$$

2. (a) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X_1)^n = (1-2p)^n$.
Comme $0 < p < 1$, $-1 < 1 - 2p < 1$ et donc $\mathbb{E}(Z_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Z_n est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.
Z_n vaut 1 quand il y a un nombre pair de variables X_i qui prennent la valeur -1. On a donc

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} p^{2k} (1-p)^{n-2k}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(Z_n = -1) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{n-2k-1}.$$

On a bien alors, $\mathbb{P}(Z_n = 1) + \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1$ par la formule du binôme et puisque $p + 1 - p = 1$.

Planche 5 Télécom

1. Sur 15 points.

$$f \ : \ x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Que vaut $f(0)$?
   (c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner f'.
   (e) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner un équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par f sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (f) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

2. Sur 5 points.

   (a) Enoncer le binôme de Newton pour des matrices.
   (b) Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, nilpotente. Calculer $(I_3 + J)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 5

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Si $x < 0$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ diverge vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$: $1 = o\left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right)$, $[t \to +\infty]$ et comme $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ ne l'est pas non plus. Comme elle est à valeurs positives, son intégrale sur $\mathbb{R}_+$ diverge et $f(x)$ n'est pas définie.
   Si $x \geq 0$, $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car elle est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc intégrable sur $[0,1]$ et dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$, qui est intégrable (fonction de référence). $f(x)$ existe donc.
   Finalement, f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) $f(0) = \frac{\pi}{2}$ car Arctan est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

   (c) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $\left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (d) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (cf la première question).
   Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}$.
   Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, pour $x \in [a,b]$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{-te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \frac{t}{1+t^2}e^{-at} \leq \frac{1}{2}e^{-at} \leq e^{-at}.$$

Or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence).
Le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre donne f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+t^2} e^{-xt} dt$.

(e) On applique de même le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre à f'. On peut utiliser la même fonction de domination de la dérivée partielle seconde par rapport à x.
On a alors pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt} dt$.
On a donc $f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

(f) Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite. Soit x_n une suite de réels positifs divergeant vers $+\infty$. Etudions $(f(x_n))$. On va appliquer le théorème de convergence dominée.
Posons, $f_n : t \mapsto \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(f_n) converge simplement vers f nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vaut 1 en 0. f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$
Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par le théorème de convergence dominée, $(f(x_n))$ converge vers 0.
Par la caractérisation séquentielle de la limite, $f(x)$ converge vers 0 en $+\infty$.

2. (a)

(b) Montrons que $J^3 = 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^p = 0$. Donc $\mathrm{Sp}(J) \subset \{0\}$. On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On a alors J trigonalisable et $\mathrm{Sp}(J) = \{0\}$. J est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte T et $T^3 = 0$. D'où $J^3 = 0$.
Pour $n = 0$, $(I_3 + J)^n = I_3$.
Pour $n = 1$, $(I_3 + J)^n = I_3 + J$.
Pour $n \geq 2$, $(I_3 + J)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$.

Planche 6 TPE-EIVP

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^n} dx$. Montrer l'existence de I_n et étudier la nature de la suite (I_n).

2. Oublié.

Solution 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_n : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$f_n \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (fonction de référence). Par comparaison, f_n est intégrable sur $]0, 1]$.
Pour $x \geq 1$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$ (car $x + \frac{1}{2} > 1$ et donc $\left(x + \frac{1}{2}\right)^n \geq x + \frac{1}{2} \geq x$). Or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de référence) et donc par comparaison, f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Finalement, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et I_n existe.
On applique le théorème de convergence dominée.
Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(f_n) converge simplement vers f telle que pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, pour $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{e}$ et pour $x > \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$. f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose φ, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[0, 1]$ et $x \mapsto e^{-x}$ sur $]1, +\infty[$. On a, avec la première partie de la question, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f_n(x) \leq \varphi(x)$. Enfin, φ est continue par

morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf début de la question).
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2}.$$

2.