

EXERCICES DIVERS POSES A L'ORAL 2017

Planche 1 ENSEA

Etudier l'existence d'une fonction continue f telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exp(f(z)) = z$$

Planche 2 Navale

1. On pose $A = X^4 + 1$ et $B = X^4 + X$. On considère l'application f qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B .
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme.
 - (b) Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
 - (c) Déterminer le noyau et l'image de f .
2. Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$.

Planche 3 TPE

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - (a) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3 .
 - (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.
 - (c) Calculer α_n et β_n .
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^\infty \frac{dt}{1+tx}$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .
 - (b) Montrer que f est de classe C^1 sur D et exprimer $f'(x)$ sous forme d'une intégrale.
 - (c) Donner les variations de f à l'aide d'une relation de Chasles et d'un changement de variable.

Planche 4 TPE

1. Soit $(E) x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$.
 - (a) Donner les solutions de (E) développables en série entière.
 - (b) A-t-on trouvé toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R} ?
2. Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose alors $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$. On suppose qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - p$.
 - (a) Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
 - (b) Quelle est la loi de Z_n ?
 - (c) Oublié.

Planche 5 Télécom

1. Sur 15 points.

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

- (a) Quel est le domaine de définition de f ?
- (b) Que vaut $f(0)$?
- (c) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- (d) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et donner f' .
- (e) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et donner une équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par f sur \mathbb{R}_+^* .
- (f) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

2. Sur 5 points.

- (a) Énoncer le binôme de Newton pour des matrices.
- (b) Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, nilpotente. Calculer $(I_3 + J)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Planche 6 TPE-EIVP

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-(x+\frac{1}{2})^n} dx$. Montrer l'existence de I_n et étudier la nature de la suite (I_n) .
2. Oublié.