EXERCICES DIVERS POSES A L'ORAL 2016

Planche 1 ENSEA, banque Centrale

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   (a) Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v - v \circ u = u$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^p \circ v - v \circ u^p = pu^p$. En déduire que u est nilpotente.
   Indication : on pourra utiliser $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $w \mapsto w \circ v - v \circ w$.
   (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
      i. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathrm{Tr}(u^k)$ en fonction des valeurs propres de u et de leurs ordres de multiplicité.
      ii. On suppose que $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que u est nilpotente.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f_n : t \mapsto e^{-t^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   (b) Montrer que $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   (c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Solution 1

1. (a) On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ l'hypothèse (H_p) : $u^p \circ v - v \circ u^p = pu^p$.
   C'est clairement vrai pour $p = 0$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que (H_p) est vraie. Montrons (H_{p+1}). On a $u^p \circ v - v \circ u^p = pu^p$. On compose par u à gauche. On a alors $u^{p+1} \circ v - u \circ v \circ u^p = pu^{p+1}$. Or $u \circ v = v \circ u + u$ et donc $u^{p+1} \circ v - (v \circ u + u) \circ u^p = pu^{p+1}$ ou encore $u^{p+1} \circ v - v \circ u^{p+1} - u^{p+1} = pu^{p+1}$ i.e. $u^{p+1} \circ v - v \circ u^{p+1} = (p+1)u^{p+1}$. (H_{p+1}) est donc vraie et par le principe de récurrence, (H_p) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   On a alors Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $u^p \neq 0$. Comme $\varphi(u^p) = pu^p$, p est valeur propre de φ. Si cela était vrai pour tout p, φ aurait une infinité de valeurs propres, or c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Donc u^p est nul pour un certain p, i.e. u est nilpotente.
   (b) i. Le polynôme caractéristique de u est scindé, donc u est trigonalisable. On note λ_l les valeurs propres deux à deux distinctes de u pour $l = 1 \cdots p$, ainsi que m_l l'ordre de multiplicité associé ($m_l \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, u^k est trigonalisable et ses valeurs propres sont les λ_l^k de multiplicité m_l et donc
$$\mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{l=1}^{p} m_l \lambda_l^k.$$
      ii. Supposons que u n'est pas nilpotente. u possède donc une valeur propre non nulle. (Sinon, le polynôme caractéristique de u est X^n et par le théorème de Cayley-Hamilton, $u^n = 0$, i.e. u est nilpotente.) On reprend les notations précédentes, avec les valeurs propres non nulles, puisque la valeur propre nulle ne contribue pas à la trace. Puisque

toutes les traces des puissances successives de u sont nulles, on a $X = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix}$ qui est solution de $AX = 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix}.$$

On reconnaît une matrice de Vandermonde, dont le déterminant est

$$\prod_{l=1}^{p} \lambda_l \prod_{1 \le i < j \le p} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

par construction. La seule solution est alors $X = 0$: contradiction. Donc u est nilpotente.

2. (a) f est continue à valeurs positives et pour $t \in [1, +\infty[$, $t^n \geq t$, donc $-t^n \leq -t$ et par croissance de l'exponentielle, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$. Or, $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de référence). Par comparaison, f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

   (b) De la même manière, $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et à valeurs positives et est aussi inférieure à $t \mapsto e^{-t}$ sur $[1, +\infty[$. On conclut comme à la question précédente.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = t^n$ dans $I_n = n \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$. $u \mapsto \sqrt[n]{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On a alors

   $$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n} du.$$

   On applique alors le théorème de convergence dominée. On pose $g_n : u \mapsto \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n}$. Chaque g_n est continue sur $[1, +\infty[$ et (g_n) converge simplement vers $g : u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ qui est continue sur $[1, +\infty[$. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $u \geq 1$, $0 \leq g_n(u) \leq e^{-u}$ car $u^{1/n} \leq u$. Comme $u \mapsto e^{-u}$ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et $I_n \underset{n \to +\infty}{\to} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$.

Planche 2 ENSEA, banque Centrale

1. Trouver le DSE de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.
   Donner une méthode de calcul à 10^{-3} près de $I = \int_0^1 e^{-t^2}\, dt$.

2. Soit $n \geq 2$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. On note θ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui même par

   $$\theta(M) = M + \mathrm{Tr}(AM)B$$

   (a) Soit $\psi : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$. Montrer que ψ est une forme linéaire non nulle.

   (b) Montrer que $\ker(\psi)$ est un sous-espace propre de θ. Montrer que si θ admet un vecteur propre M associé à une valeur propre $\neq 1$ alors (B, M) est liée.

   (c) Donner alors une CNS pour que θ soit diagonalisable.

Solution 2

1. Par théorème fondamental, la fonction proposée est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto e^{-x^2}$ (qui est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$). Comme on peut primitiver les DSE, on a donc (en utilisant le DSE de e^{-x^2} et en prenant garde à la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x e^{-t^2}\ dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}$$

   En pariculier, on a

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$$

   $\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$ est le terme général d'une suite de limite nulle, alternée, décroissante en module. On peut lui appliquer la règle spéciale et affirmer que

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \right| \leq \frac{1}{n!(2n+1)}$$

   Si le majorant est plus petit que 10^{-3} alors on a une valeur approchée à 10^{-3} près de I. On itère donc pour calculer la somme tant que le majorant est $> 10^{-3}$.

2. (a) ψ est linéaire ($\psi(M + \mu N) = \psi(M) + \mu\psi(N)$) par linéarité de la trace. Elle va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et c'est donc une forme linéaire. Comme $\psi(I_n) = \mathrm{Tr}(A) \neq 0$, elle est non nulle.

   (b) $\theta(M) = M$ équivaut à $\psi(M)B = 0$ et, comme B est non nulle, à $M \in \ker(\psi)$. On a ainsi

$$\ker(\theta - Id) = \ker(\psi)$$

   et c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (noyau de forme linéaire non nulle) i.e. un sous-espace de dimension $n^2 - 1$.
   Si $\theta(M) = \lambda M$ avec $\lambda \neq 0$ et $M \neq 0$ alors $(\lambda - 1)M = \mathrm{Tr}(AM)B$ et comme $(\lambda - 1) \neq 0$, (M, B) est liée.

   (c) S'il y a un autre sous-espace propre que $\ker(\psi)$, il est engendré par B. Or, $\theta(B) = (1 + \psi(B))B$ et on a donc deux cas.
   - Si $(1 + \psi(B)) = 0$ alors 0 est la seule valeur propre et le sous-espace associé n'est pas l'espace entier. θ n'est pas diagonalisable.
   - Sinon, B est vecteur propre associé à $1 + \psi(B) \neq 0$. On a deux sous-espaces propres dont la somme des dimensions vaut $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et θ est diagonalisable.

Planche 3 TPE-EIVP

1. On note $f_n\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto e^{n(x-n)}$.
   (a) Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $\sum(f_n)_{n\geq 0}$. On note F la somme.
   (b) Montrer que $F \in C^0(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum(f_n^{(k)})$ converge normalement sur toute partie sur type $]-\infty, a]$.
   (d) Montrer que $F \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. Soit $n \geq 2$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = n$. Résoudre $-M + \mathrm{tr}(M)A = B$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,j} = ij$. Déterminer les valeurs propres de M.

Solution 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, $x - n \leq -1$ et $0 \leq f_n(x) \leq e^{-n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum(f_n(x))$ converge. On a montré que $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et la somme F est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. On utilise le théorème de continuité.

   - f_n est continue pour tout n.
   - $\forall [a,b] \subset \mathbb{R},\ \forall n \geq b+1,\ \forall x \in [a,b],\ |f_n(x)| \leq e^{-n}$. Le majorant est indépendant de x (idem pour le rang $b+1$) et est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

   Le théorème s'applique et indique que $F \in C^0(\mathbb{R})$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n^{(k)}(x) = n^k e^{n-x}$. Comme ci-dessus

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \geq a+1,\ \forall x \in]-\infty, a],\ |f_n^{(k)}(x)| \leq e^{-n} n^k = o(1/n^2)$$

   Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_n^{(k)})$ converge normalement sur tout ensemble du type $]-\infty, a]$.

4. Il y a a fortiori convergence normale (et donc uniforme) sur tout segment de $\mathbb{R}$ et le théorème de régularité indique que $F \in C^\infty(\mathbb{R})$.

5. Raisonnons par CN puis CS.

   - Supposons M convenable. On a donc, en passant à la trace, $\mathrm{Tr}(M) = \frac{n}{n-1}$ et donc

$$M = \frac{n}{n-1} A - B$$

   - Réciproquement, cette matrice est de trace $\frac{n}{n-1}$ et elle vérifie l'équation.

6. Notons $C = (1, 2, \ldots, n)$ (identifié à une matrice colonne. Les colonnes de A sont $C, 2C, \ldots, nC$ et A est de rang 1. A possède donc 0 comme valeur propre et le sous-espace propre est de dimension $n-1$. Notons λ la seconde valeur propre (éventuellement complexe) de A. A étant $\mathbb{C}$-trigonalisable, la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité vaut la trace. On a donc

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\}$.
   Remarque : le sous-espace propre associé à la seconde valeur propre est de dimension 1. *Il est facile de vérifier qu'il est engendré par* C.

Planche 4 Télécom

1. (16 points)
   $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x^2}$.

   (a) Montrer rapidement que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et que f est paire.

   (b) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pourtant f y est continue.

   (c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$.

(d) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Exprimer $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx$ sous la forme d'une somme de série numérique.

2. (4 points)
Proposer un algorithme permettant d'orthonormaliser une base d'un espace euclidien.

Solution 4

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$. Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), par linéarité, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2x^2}$ converge et par comparaion de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge : $f(x)$ est bien défini. Même si ce n'est a priori pas demandé, on peut remarquer que f n'est pas définie en 0, car la série harmonique diverge. Chaque u_n étant paire, f est paire.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ (sa valeur en 0). Comme la série harmonique diverge, $\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_\infty$ diverge : $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Cependant, pour $a > 0$, avec les même arguments, $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a)$ et $\sum_{n\geq 1} u_n(a)$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge : $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$ et comme chaque u_n est continue sur $[a, +\infty[$, f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Chaque u_n tend vers 0 en $+\infty$ et comme $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[1, +\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion limite-somme et f tend vers 0 en $+\infty$.
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n : x \mapsto x^2u_n(x)$. Par linéarité, $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme est $x \mapsto x^2f(x)$. Une étude de fonctions montre que v_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ de 0 en 0 à $\frac{1}{n^2}$ en $+\infty$. On a donc $\|v_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$: $\sum_{n\geq 1} \|v_n\|_\infty$ converge, $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme chaque v_n converge vers $\frac{1}{n^2}$ en $+\infty$, on peut utiliser le théorème d'interversion limite-somme et $x^2f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. On a bien $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$.

   (d) On utilise le théorème d'interversion somme-intégrale.
   Chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (continue sur $[0, 1]$ et dominée par $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$), donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf précédemment).
   On pose $I_n = \int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+nx^2}dx$.
   On effectue le changement de variable $u = \sqrt{n}x$ dans la dernière intégrale ($x \mapsto \sqrt{n}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$). On a alors,

$$I_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

   $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann) et par linéarité, $\sum_{n\geq 1} I_n$ converge. On peut appliquer le théorème d'interversion somme-intégrale et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

2. Il s'agit d'expliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Voir le cours...

Planche 5 St-Cyr

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   (a) Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 1} v_n$?
   (b) Donner $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_n \sim v_n$ et $\sum(u_n - v_n)$ soit divergente.
   (c) Quelle est la nature de $\sum u_n$?
2. Exercice avec Python.
   On dit qu'une liste l de longueur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, admet un pic en $i \in [\![0, n-1]\!]$, si le i-ème élément de cette liste est supérieur au précédent et au suivant (pour $i = 0$, on veut $l[0] \geq l[1]$ et pour $i = n-1$, on veut $l[n-1] \geq l[n-2]$). Le pic est alors la valeur de l'indice i.
   (a) Donner une fonction `Pic` d'argument l, une liste de longueur n, de temps d'exécution en $O(n)$, qui renvoie un pic de l.
   (b) Donner une fonction récursive `PicRec` d'argument l, une liste de longueur n, de temps d'exécution en $O(\log_2(n))$ renvoyant un pic de l.

Solution 5

1. (a) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge par le théorème spécial à certains séries alternées.
   (b) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. On a bien $u_n \sim v_n$ car $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et comme $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\sum_{n\geq 1}(u_n - v_n)$ divergente.
   (c) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge, sinon, par linéarité, $\sum_{n\geq 1}(u_n - v_n)$ convergerait.
2. (a)
```
def Pic(l):
    n=len(l)
    if l[0]>=l[1]:
        return(0)
    if l[n-1]>=l[n-2]:
        return(n-1)
    for i in range(1,n-1):
        if l[i-1]<=l[i] and l[i+1]<=l[i]:
            return(i)
```
   (b)
```
def PicRec(l):
    n=len(l)
    def Aux(a,b):
        if a==b:
            return(a)
        if b==a+1:
            if l[a]>=l[b]:
                return(a)
            else:
                return(b)
        else:
```

```
            p=(b-a)//2
            if l[a+p]>=l[a+p-1] and l[a+p]>=l[a+p+1]:
                return(a+p)
            if l[a+p]<l[a+p-1]:
                return(Aux(a,a+p-1))
            if l[a+p]<l[a+p+1]:
                return(Aux(a+p+1,b))
    return(Aux(0,n-1))
```

L'idée est de couper la liste en deux, en regardant si l'élément "du milieu" est pic ou non. Si oui, on renvoie sa valeur. Sinon, s'il est strictement inférieur à l'élément précédent, on recherche le pic dans la première moitié de la liste car ou cette moitié est rangée en ordre décroissant et un pic est réalisé tout au début ou il y a (au moins un) changement de variations (croissance puis décroissance) et donc un maximum local dans cette première moitié. Enfin, si l'élément du milieu est strictement inférieur au suivant, on recherche le pic dans la seconde moitié de la liste, avec la même idée que précédemment : ou cette deuxième moitié est rangée en ordre croissant et un pic est réalisé à la fin ou il y a (au moins un) changement de variations (croissance puis décroissance) et donc un maximum local dans cette deuxième moitié. On fait porter la récursivité sur la fonction qui prend en argument les indices entre lesquels on cherche le pic.

Planche 6 TPE-EIVP

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^a x^n(1-x)$. Pour quelles valeurs de a, (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{rg}(M) = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $C \neq 0$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $L \neq 0$ telles que $M = CL$.
   (b) Quel est le polynôme caractéristique de M ? M est-elle diagonalisable ?
   (c) Montrer que $\mathrm{Vect}(I_n, M)$ est stable par la multiplication.
   (d) Trouvez une caractérisation de $M+I_n$ inversible. Lorsqu'elle est inversible, quel est l'inverse de $M + I_n$?

Solution 6

1. Etudions d'abord la convergence simple de cette suite de fonctions. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$ ou $x = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 0$. Donc $(f_n(x))$ converge vers 0.
   Si $x \in]0,1[$, $(f_n(x))$ converge vers 0 par croissances comparées.
   En conclusion, (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.
   Pour la convergence uniforme, il s'agit donc d'étudier la suite $(\|f_n\|_\infty)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $f_n'(x) = n^a x^{n-1}(n-(n+1)x)$ qui change de signe en $\frac{n}{n+1}$. f_n est donc croissante sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$. Comme elle est positive, $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^a}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$. On a alors $\|f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-1}n^{a-1}$ et donc $\|f_n\|$ tend vers 0 si et seulement si $a - 1 < 0$ i.e. $a < 1$.
2. (a) M étant de rang 1 toutes ses colonnes sont liées : il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = \alpha_i C$, en ayant noté C_i la i-ème colonne de M. M étant non nulle, $C \neq 0$. On note alors $L = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$. On a bien $M = CL$, et L est non nulle, sinon, $M = 0$.

(b) $M^2 = CLCL = (LC)CL = \mathrm{Tr}(M)M$. On a donc $P = X(X - \mathrm{Tr}(M))$ qui annule M. On distingue alors les cas, suivant que $\mathrm{Tr}(M)$ est nulle ou pas.
Si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$ alors$P$ est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable et ses valeurs propres sont incluses dans $\{0, \mathrm{Tr}(M)\}$. 0 est valeur propre et son sous-espace propre est le noyau de M, qui, par le théorème du rang, est de dimension $n-1$. Il reste bien une autre valeur propre, sinon, M ne serait pas diagonalisable. $\mathrm{Tr}(M)$ est donc valeur propre et son sous-espace propre est de dimension 1. Le polynôme caractéristique de M est donc $X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(M))$.
Si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, alors 0 est la seule valeur propre de M et comme son sous-espace propre est de dimension $n-1$ (cf précédemment), M n'est pas diagonalisable. Par ailleurs, X^{n-1} divise donc χ_M qui est unitaire de degré n et qui ne possède pas d'autres racines que 0 : $\chi_M = X^n$.
Dans tous les cas, $\chi_M = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(M))$.
En revanche M n'est diagonalisable que si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.

(c) Il suffit de montrer que M^2 est encore dans $\mathrm{Vect}(I_n, M)$. Or on a vu que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$. Donc, on a bien $\mathrm{Vect}(I_n, M)$ stable par la multiplication.

(d) $M + I_n$ est inversible si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de M et donc si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$.
Avec la question précédente, on cherche un inverse dans $\mathrm{Vect}(I_n, M)$. On trouve alors $(M + I_n)^{-1} = \frac{-1}{\mathrm{Tr}(M)+1}M + I_n$.