DETERMINANTS

1 Déterminant d'une matrice.

1.1 Définitions.

Définitions
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On dit que f est linéaire par rapport à la i-ème colonne de sa variable si, pour toutes colonnes $C_1, \ldots C_{i-1}, C_i, C_i', C_{i+1}, \ldots, C_n$ et pour tous α, β dans $\mathbb{K}$, on a :

$$f((C_1 \cdots C_{i-1} \alpha C_i + \beta C_i' C_{i+1} \cdots C_n)) = \alpha f((C_1 \cdots C_{i-1} C_i C_{i+1} \cdots C_n)) + \beta f((C_1 \cdots C_{i-1} C_i' C_{i+1} \cdots C_n)).$$

- On dit que f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, et pour toutes colonnes $C_1, \ldots, C_n$, on a :

$$f((C_1 \cdots C_i \cdots C_j \cdots C_n)) = -f((C_1 \cdots C_j \cdots C_i \cdots C_n)).$$

Théorème
Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, vérifiant les trois propriétés suivantes :
(i) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable,
(ii) f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable,
(iii) $f(I_n) = 1$.

Définition : cette unique application est appelée déterminant et pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ l'image de A par cette application.

1.2 Propriétés.

Proposition
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Proposition
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition Opérations élémentaires et déterminant
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(i) Le déterminant de A reste inchangé si on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A.
(ii) Le déterminant de A est changé en son opposé si on échange deux colonnes de A.
(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Le déterminant de A est multiplié par α si on multiplie tous les coefficients d'une colonne par α.

Proposition Déterminant d'une matrice triangulaire
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). Le déterminant de A est égal au produit de ses éléments diagonaux.

□ On note $a_1, \ldots, a_n$ les éléments diagonaux de A.
1er cas : tous les a_i sont non nuls. Par opérations élémentaires sur les colonnes, du type

$C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient $\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$. Par linéarité, $\det(A) = a_1 \cdots a_n \det(I_n) = a_1 \cdots a_n$.

2ème cas : un des a_i est nul. S'il s'agit de a_1, le déterminant de A est nul, car sa première colonne est nulle. Sinon, on note i_0 le plus petit indice i pour lequel $a_i = 0$. En effectuant des opérations sur les colonnes de A, on peut faire apparaître des 0 sur les $i_0 - 1$ premières lignes, en dehors de la diagonale. La i_0-ème colonne est alors nulle et donc le déterminant de A est nul. □

Proposition Déterminant du produit de deux matrices
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

□ On écrit $B = RE$ avec E un produit de matrices de dilatations, de transvections et de permutations et où R est une matrice échelonnée réduite par colonnes.
Supposons que B n'est pas inversible. La matrice R contient alors une colonne de 0, donc $\det(R) = 0$. Par les résultats précédents $\det(B)$ est proportionnel à $\det(R)$ (les opérations élémentaires ne changent pas le déterminant ou le change en son opposé ou le multiplie par un scalaire) et donc $\det(B) = 0$. Or $AB = ARE$, et comme précédemment, $\det(AB)$ est proportionnel à $\det(AR)$, mais AR possède aussi une colonne nulle, donc son déterminant est nul : $\det(AB) = 0 = \det(A)\ \det(B)$.
Supposons maintenant que B est inversible. Alors, $R = I_n$ et donc $B = E$. Si on écrit $E = E_1 \cdots E_p$, avec les E_i matrices d'opérations élémentaires, on a $\det(AB)$=$\det(AE_1 \cdots E_p)$.
Si E_p est une matrice de transvection, $\det(AB)$=$\det(AE_1 \cdots E_{p-1})$ et $\det(E_p) = 1$, donc

$$\det(AB) = \det(AE_1 \cdots E_{p-1})\det(E_p).$$

Si E_p est une matrice de permutation, $\det(AB)$=-$\det(AE_1 \cdots E_{p-1})$ et $\det(E_p) = -1$, donc on a encore

$$\det(AB) = \det(AE_1 \cdots E_{p-1})\det(E_p).$$

Si E_p est une matrice de dilatation, $\det(AB) = \alpha \det(AE_1 \cdots E_{p-1})$ et $\det(E_p) = \alpha$, donc on a encore

$$\det(AB) = \det(AE_1 \cdots E_{p-1})\det(E_p).$$

On itère le processus, on a alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(E_1) \cdots \det(E_{p-1})\det(E_p).$$

On montre de même que

$$\det(B) = \det(E_1) \cdots \det(E_{p-1})\det(E_p).$$

On a donc bien $\det(AB) = \det(A)\ \det(B)$. □

Proposition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

(ii) Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

□ Si A est inversible, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$. Par ce qui précède, $1 = \det(AB) = \det(A)\ \det(B)$. Donc $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) = \frac{1}{\det(A)}$, mais $B = A^{-1}$.

Réciproquement, si $\det(A) \neq 0$. On décompose $A = RE$ avec E un produit de matrices de dilatations, de transvections et de permutations et où R est une matrice échelonnée réduite par colonnes.
$\det(A) = \det(R)\,\det(E)$ et comme $\det(E) \neq 0$ (c'est le produit de déterminants de matrices de dilatations, de transvections ou de permutations), $\det(R) \neq 0$. R ne contient donc pas de colonne nulle et A est inversible. $\square$

Proposition Déterminant de la transposée
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(A) = \det(A^T).$$

$\square$ Si A n'est pas inversible, alors sa transposée ne l'est pas non plus et donc les deux déterminants sont égaux à 0.
Si A est inversible, $A = RE$ avec E un produit de matrices de dilatations, de transvections et de permutations et où R est une matrice échelonnée réduite par colonnes. On a $R = I_n$ et donc

$$A = E_1 \cdots E_p$$

où chaque E_i est une matrice de transvection, de permutation ou de dilatation. On a alors

$$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_p)$$

et on vérifie facilement que pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, $\det(E_i) = \det(E_i^T)$. On a alors

$$\det(A) = \det(E_1^T) \cdots \det(E_p^T) = \det(E_p^T) \cdots \det(E_1^T) = \det(E_p^T \cdots E_1^T) = \det(A^T). \qquad \square$$

Proposition Développements d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $A_{k,l}$ la matrice issue de A en ôtant la ligne k et la colonne l de A.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\det(A) = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}(-1)^{k+l}\det(A_{k,l}).$$
(Développement du déterminant de A suivant la ligne k.)

2. Soit $l \in [\![1, n]\!]$,
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,l}(-1)^{k+l}\det(A_{k,l}).$$
(Développement du déterminant de A suivant la colonne l.)

$\square$ Admis $\square$

2 Déterminant d'une famille de vecteurs.

Définition : soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, le déterminant de la matrice représentative de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition Caractérisation des bases
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. On a alors

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

3 Déterminant d'un endomorphisme.

Proposition
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Les matrices de f dans une base quelconque de E ont toutes le même déterminant.

Définition : ce déterminant commun est appelé déterminant de f et on le note $\det(f)$.

Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
(i) $\det(Id_E) = 1$.
(ii) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
(iii) Pour tous f et g dans $\mathcal{L}(E)$, $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$.
(iv) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$.
(v) Pour tout $f \in \mathcal{GL}(E)$, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

4 Compléments de spé

4.1 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

On peut écrire une matrice par blocs de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

avec $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-q}(\mathbb{K})$.
Avec la cohérence des tailles, on a alors

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

On fera bien attention à la non commutativité du produit matriciel.

Proposition
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, où $p + q = n$. Alors

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

4.2 Déterminant de Vandermonde

Proposition
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$