SERIES NUMERIQUES

1 Suites et séries

1.1 Généralités

Définitions

• Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n le couple $((u_n),(S_n))$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée la n-ième somme partielle de la série. La série est notée $\sum u_n$. (S_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

• Si $n \in \mathbb{N}$, u_n est le n-ième terme de la série $\sum u_n$.

Remarque : on a le même vocabulaire et on adapte les définitions si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est seulement définie à partir d'un certain rang n_0.

Définitions

• Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit qu'elle converge lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles converge dans $\mathbb{K}$. Sinon, on dit que $\sum u_n$ diverge.

• Si $\sum u_n$ converge, la limite de la suite (S_n) de ses sommes partielles est appelée la somme de la série $\sum u_n$ et est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque : on ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Proposition 1
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Remarques

1. On utilise surtout la contraposée de ce résultat. Si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de divergence grossière.
2. La réciproque est fausse. On peut avoir $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\sum u_n$ divergente.

Proposition 2 (**Séries géométriques**)
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$; lorsqu'elle converge, sa somme vaut $\frac{1}{1-z}$.

Proposition 3
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\quad (u_n)$ converge $\quad \Longleftrightarrow \quad \sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

1.2 Espace vectoriel des suites dont la série converge

Proposition 4
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Remarque : on pose $E = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$. E est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,.)$. Muni des lois induites, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\theta : E \to \mathbb{K}$, $(u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

Proposition 5
(i) Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.
(ii) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Proposition 6
Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.

$$\begin{aligned}\sum u_n \text{ converge} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum \mathrm{Re(u_n)} \text{ et } \mathrm{Im(u_n)} \text{ convergent} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum \overline{u_n} \text{ converge.}\end{aligned}$$

<u>Définition</u> : soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle <u>reste</u> d'ordre n et on note R_n le nombre $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

<u>Remarque</u> : (R_n) converge vers 0.

2 Séries à termes positifs.

2.1 Critère de convergence.

Proposition 7
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si c'est le cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right).$$

Proposition 8
$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow$ $\alpha > 1$.

2.2 Théorème de comparaison

Théorème 1
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

(i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

<u>Remarque</u> : la contraposée de (i) donne : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

2.3 Exemple : comparaison aux séries de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(i) S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ et $l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $n^\alpha u_n \to l$, alors $\sum u_n$ diverge.

2.4 Comparaison aux séries géométriques

Proposition 9 (**Règle de d'Alembert**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.
On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite l dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors, si $l < 1$, $\sum u_n$ converge. Si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

3 Séries de nombres réels ou complexes

3.1 Convergence absolue

Définition : soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 2
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Proposition 10 (**Exponentielle**)
Soit $z \in \mathbb{C}$. $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. Sa somme est appelée l'exponentielle de z et est notée $\exp(z)$ ou e^z.

Proposition 11 (**de comparaison**)
Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à valeurs positives.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

3.2 Sommation des relations de comparaison.

Cas des séries convergentes

Proposition 12
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs (ou de signe constant à partir d'un certain rang) convergente.

(i) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Cas des séries divergentes

Proposition 13
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs (ou de signe constant à partir d'un certain rang) divergente.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

Application : **théorème de Césàro**

Soit (u_n) une suite convergente. On note l sa limite. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Alors $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et converge aussi vers l.

Remarque : la réciproque est fausse.

3.3 Séries alternées

Définition : soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ est alternée lorsque $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.

Théorème 3 (**spécial à certaines séries alternées**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. Si $\sum u_n$ est alternée, si $u_n \to 0$ et si $(|u_n|)$ est décroissante, alors

1. $\sum u_n$ converge, on note alors, pour $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'indice n de $\sum u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1},
4. si on note S la somme de la série, S est du signe de u_0.

4 Comparaison d'une série à une intégrale

4.1 Encadrement

Proposition 14
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et monotone.

(i) Si f est décroissante, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$, $\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum\limits_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_p^q f$.

(ii) Si f est croissante, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$, $\int_p^q f \leq \sum\limits_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_{p+1}^{q+1} f$.

4.2 Cas d'une fonction décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

Théorème 4 (**Comparaison série-intégrale**)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. $\sum w_n$ converge.
2. $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\left(\int_0^n f\right)$ converge.
3. Si $\sum f(n)$ converge alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f.$$