

SERIES NUMERIQUES

1 Suites et séries

1.1 Généralités

Définitions

- Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n le couple $((u_n), (S_n))$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée la n -ième somme partielle de la série. La série est notée $\sum u_n$. (S_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, u_n est le n -ième terme de la série $\sum u_n$.

Remarque : on a le même vocabulaire et on adapte les définitions si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est seulement définie à partir d'un certain rang n_0 .

Définitions

- Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit qu'elle converge lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles converge dans \mathbb{K} . Sinon, on dit que $\sum u_n$ diverge.
- Si $\sum u_n$ converge, la limite de la suite (S_n) de ses sommes partielles est appelée la somme de la série $\sum u_n$ et est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque : on ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Proposition 1

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarques

1. On utilise surtout la contraposée de ce résultat. Si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de divergence grossière.
2. La réciproque est fautive. On peut avoir $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\sum u_n$ divergente.

Proposition 2 (Séries géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$; lorsqu'elle converge, sa somme vaut $\frac{1}{1-z}$.

Proposition 3

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, (u_n) converge $\iff \sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

1.2 Espace vectoriel des suites dont la série converge

Proposition 4

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes. Soient λ et μ dans \mathbb{K} . Alors $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque : on pose $E = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$. E est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.

Muni des lois induites, c'est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\theta : E \rightarrow \mathbb{K}$, $(u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

Proposition 5

- (i) Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.
 (ii) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Proposition 6

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ converge} &\iff \sum \operatorname{Re}(u_n) \text{ et } \sum \operatorname{Im}(u_n) \text{ convergent} \\ &\iff \sum \overline{u_n} \text{ converge.} \end{aligned}$$

Définition : soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'ordre n et on

$$\text{note } R_n \text{ le nombre } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k.$$

Remarque : (R_n) converge vers 0.

2 Séries à termes positifs.**2.1 Critère de convergence.****Proposition 7**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si c'est le cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right).$$

Proposition 8

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

2.2 Théorème de comparaison**Théorème 1**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- (i) Si $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
 (ii) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
 (iii) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque : la contraposée de (i) donne : si pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

2.3 Exemple : comparaison aux séries de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- (i) S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$, alors $\sum u_n$ converge.
 (ii) S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ et $l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow l$, alors $\sum u_n$ diverge.

2.4 Comparaison aux séries géométriques

Proposition 9 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite l dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors, si $l < 1$, $\sum u_n$ converge. Si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

3 Séries de nombres réels ou complexes

3.1 Convergence absolue

Définition : soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 2

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Proposition 10 (Exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}$. $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. Sa somme est appelée l'exponentielle de z et est notée $\exp(z)$ ou e^z .

Proposition 11 (de comparaison)

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à valeurs positives.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

3.2 Sommatation des relations de comparaison.

Cas des séries convergentes

Proposition 12

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs (ou de signe constant à partir d'un certain rang) convergente.

- (i) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$.
- (ii) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right)$.
- (i) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Cas des séries divergentes

Proposition 13

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs (ou de signe constant à partir d'un certain rang) divergente.

- (i) Si $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^n u_k = O_{n \rightarrow +\infty}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.
- (ii) Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.
- (iii) Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$.

Application : théorème de Césàro

Soit (u_n) une suite convergente. On note l sa limite. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Alors $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente et converge aussi vers l .

Remarque : la réciproque est fautive.

3.3 Séries alternées

Définition : soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ est alternée lorsque $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.

Théorème 3 (spécial à certaines séries alternées)

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. Si $\sum u_n$ est alternée, si $u_n \rightarrow 0$ et si $(|u_n|)$ est décroissante, alors

1. $\sum u_n$ converge, on note alors, pour $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'indice n de $\sum u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |u_{n+1}|$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}, R_n$ est du signe de u_{n+1} ,
4. si on note S la somme de la série, S est du signe de u_0 .

4 Comparaison d'une série à une intégrale

4.1 Encadrement

Proposition 14

Soit $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et monotone.

- (i) Si f est décroissante, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$, $\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{n=p+1}^q f(n) \leq \int_p^q f$.
- (ii) Si f est croissante, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$, $\int_p^q f \leq \sum_{n=p+1}^q f(n) \leq \int_{p+1}^{q+1} f$.

4.2 Cas d'une fonction décroissante à valeurs dans \mathbb{R}_+

Théorème 4 (Comparaison série-intégrale)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt$.

1. $\sum w_n$ converge.
2. $\sum f(n)$ converge si et seulement si $(\int_0^n f)$ converge.
3. Si $\sum f(n)$ converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f.$$