REDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARREES (Partie I)

Soit E un K-espace vectoriel, K étant un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1 Compléments d'algèbre linéaire

1.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(V_1, \cdots, V_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. On note $V_1 + \cdots V_p$ l'ensemble :

$$\{x \in E \mid \exists (x_1, \ldots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p,\ x = x_1 + \cdots + x_p\}.$$

Proposition 1
Soit $(V_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
$V_1 + \cdots + V_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^{p} V_i$.

Remarque
$V_1 \times \cdots \times V_p$ est un K-espace vectoriel. On note ψ l'application linéaire : $V_1 \times \cdots \times V_p \to V_1 + \cdots + V_p$, $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_1 + \cdots + x_p$. ψ est surjective, par définition de la somme $V_1 + \cdots + V_p$.

1.2 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(V_1, \cdots, V_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $V = V_1 + \cdots + V_p$ est directe (ou que les V_i sont en somme directe) lorsque pour tout
$(x_1, \ldots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$,

$$x_1 + \cdots + x_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\forall i \in [\![1, p]\!], x_i = 0).$$

On écrit alors $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$.

Remarque
La somme est directe si et seulement si ψ est injectif et donc si et seulement si ψ est un isomorphisme.

Proposition 2
Soit $(V_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) $V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$,
(ii) la seule décomposition de 0 dans $V_1 + \cdots + V_p$ est $0 + \cdots + 0$,
(iii) $\forall x \in V_1 + \cdots + V_p$, $\exists! (x_1, \ldots, x_p) \in V_1 \times \cdots \times V_p$, $x = x_1 + \cdots + x_p$.

Remarques
1. Deux sous-espaces vectoriels V et W de E sont en somme directe si et seulement si $V \cap W = \emptyset$.
2. Attention à partir de 3 sous-espaces vectoriels, le fait que les intersections deux à deux soient réduites au singleton $\{0\}$, ne suffit pas à assurer que les sous-espaces sont en somme directe.

Proposition 3
Soit $(V_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, en somme directe.
Pour $i = 1 \cdots p$ on prend $x_i \in V_i \setminus \{0\}$. Alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

1.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(V_1, \cdots, V_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. On dit que les V_i sont supplémentaires dans E lorsque

$$\bigoplus_{i=1}^{p} V_i = E$$

i.e. les V_i sont en somme directe et leur somme est E.

Remarque

On note θ l'application linéaire : $V_1 \times \cdots \times V_p \to E$, $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_1 + \cdots + x_p$. θ est linéaire.

$V_1 \oplus \cdots \oplus V_p \iff \theta$ injective.

$E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p \iff \theta$ bijective.

Définition : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(V_1, \cdots, V_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E. Soit $i_0 \in [\![1, p]\!]$. On définit $p_{i_0} : E \to E$, $x \mapsto x_{i_0}$ avec $x = x_1 + \cdots + x_p$ est l'unique décomposition de x dans $V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$.

p_{i_0} est le projecteur sur V_{i_0} associé à la décomposition $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$.

1.4 Cas de la dimension finie.

Proposition 4

Soient $V_1, \ldots, V_p$ des sous-espaces vectoriels de E, chacun des V_i étant de dimension finie.

(i) Alors $V_1 + \cdots + V_p$ est de dimension finie et $\dim(V_1 + \cdots + V_p) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim(V_k)$.

(ii) On a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la somme $V_1 + \cdots + V_p$ est directe.

Proposition 5

On suppose E de dimension finie. Soient $V_1, \ldots V_p$ des sous-espaces vectoriels de E, en somme directe. Ils sont supplémentaires si et seulement si $\sum_{k=1}^{p} \dim(V_k) = \dim(\mathrm{E})$.

1.5 Supplémentaires et bases

Proposition 6 - Définition

Soit $(V_1, \cdots, V_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E. Pour $i = 1 \cdots p$, soit $\mathcal{E}_i$ une base de V_i. On note $\mathcal{E}$ la concaténée de ces bases. Alors $\mathcal{E}$ est une base de E. Elle est dite adaptée à la décomposition $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$.

1.6 Supplémentaires et applications linéaires

Proposition 7

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E. Pour $i = 1, \ldots, p$, soit $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.

Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour $i = 1, \ldots, n$, $u_{|_{E_i}} = u_i$.

1.7 Matrices par blocs

On peut écrire une matrice par blocs de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

avec $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-q}(\mathbb{K})$.

Interprétation géométrique
Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et F respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que sa matrice représentative dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soient M. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$ et que $\mathcal{B}$ est adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$, i.e. que c'est la concaténée d'une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 et d'une base $\mathcal{B}_2$ de E_2, de même $\mathcal{C}$ est adaptée à la décomposition $F = F_1 \oplus F_2$, i.e. que c'est la concaténée d'une base $\mathcal{C}_1$ de F_1 et d'une base $\mathcal{C}_2$ de F_2. Si on note p_1 et p_2 les projecteurs sur F_1 et F_2 respectivement associés à la décomposition $F = F_1 \oplus F_2$, alors $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1}(p_1 \circ f_{|E_1})$, $B = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_1}(p_1 \circ f_{|E_2})$, $C = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_2}(p_2 \circ f_{|E_1})$, $D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2}(p_2 \circ f_{|E_2})$.

1.8 Opérations sur les matrices par blocs

• Combinaison linéaire Avec la cohérence des tailles

$$\lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A + \mu A' & \lambda B + \mu B' \\ \lambda C + \mu C' & \lambda D + \mu D' \end{pmatrix}.$$

• Produit Avec la cohérence des tailles

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

On fera bien attention à la non commutativité du produit matriciel AA' par exemple.

• Transposition

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}.$$

On adapte pour k^2 blocs pour $k = 2 \cdots n-1$.

1.9 Déterminants par blocs

Proposition 8
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, où $p+q=n$. Alors

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

Définition : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une matrice de transvection est une matrice de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K^*$.

Si T est une matrice de transvection, $\det(T) = 1$, T est inversible et $T^{-1} = I_n - \lambda E_{i,j}$.

Proposition 9
Le déterminant est invariant par la multiplication à droite où à gauche par une matrice de transvection par blocs.

2 Sous-espaces stables

2.1 Définition

Définitions : soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que F est stable par u si et seulement si pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.
- Si F est stable par u, on définit l'endomorphisme de F induit par u par $F \to F$, $x \mapsto u(x)$. On le note u_F.

Proposition 10
Soient u et v deux endomorphismes de E. Si u et v commutent alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.

2.2 Traduction matricielle en dimension finie

Proposition 11
On suppose E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est stable par u si et seulement si la matrice représentative de u dans une base de E adaptée à F est triangulaire supérieure par blocs, i.e.

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{B}'$ est formée des premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ qui forment une base de F, alors $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(u_F)$.

Proposition 12
On suppose E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(V_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E.
Les V_i sont tous stables par u si et seulement si, $\mathcal{B}$ étant une base de E adaptée à la décomposition $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$,

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & A_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}.$$

On dit que $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{u})$ est diagonale par blocs. Si c'est le cas, si on note $\mathcal{B}_i$ la base de V_i qui est contenue dans $\mathcal{B}$ et u_i l'endomorphisme de V_i induit par u, alors $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u_i) = A_i$.

3 Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

3.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définitions : soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $\lambda \in K$. λ est une valeur propre de u si et seulement s'il existe un élément x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$ (i.e. $u - \lambda \mathrm{Id_E}$ n'est pas injectif).
- Soit $x \in E$. On dit que x est vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda \in K$ si $x \neq 0$ et si $u(x) = \lambda x$.
- Lorsque E est de dimension finie, on appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u. On le note $\mathrm{Sp}(u)$.

Remarque : une droite vectorielle de E est stable par u si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de u.

Proposition 13
Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in K$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp(u)} \iff \mathrm{u - \lambda Id_E \text{ non inversible}} \iff \mathrm{det(u - \lambda Id_E) = 0}.$$

3.2 Sous-espaces propres

Définition : soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On appelle sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id_E})$, noté, $E_\lambda(u)$.

Proposition 14
Soient u et v deux endomorphismes de E. Si u et v commutent alors pour toute valeur propre λ de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Proposition 15
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de valeurs propres de u deux à deux distinctes. Alors les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe.

Proposition 16
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de valeurs propres de u deux à deux distinctes. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p$ une famille de vecteurs propres associés respectivement à chacune des valeurs propres λ_i. Alors $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre dans E.

Proposition 17
Supposons que E est de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$: $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}(u)) \leq n$.

3.3 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée

Définitions : soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

- On dit que λ est valeur propre de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$.
- On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in K$ si $X \neq 0$ et si $AX = \lambda X$.
- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.
- Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I_n}) = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n,1}}(\mathrm{K}) \mid \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}\}$ et est noté $E_\lambda(A)$.

Proposition 18
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\lambda \in K$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad A - \lambda \mathrm{I_n} \text{ est non inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I_n}) = 0.$$

Proposition 19
Deux matrices semblables ont même spectre.

Proposition 20
Un endomorphisme de E et sa matrice représentative dans une base donnée ont même spectre et leurs sous-espaces propres sont isomorphes.

Proposition 21
Soit K' un sous-corps de K. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K')$. Alors $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\mathrm{Sp}_{K'}(A) \subset \mathrm{Sp}_K(A)$.

<u>Remarque</u> : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathbb{R} \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

4 Polynôme caractéristique

4.1 Définition

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note χ_A le polynôme défini par

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (X\delta_{\sigma(j),j} - a_{\sigma(j),j}).$$

Remarques

1. Lorsque K est infini, c'est le polynôme associé à la fonction $x \mapsto \det(x\mathrm{I_n} - \mathrm{A})$.
2. χ_A est unitaire et de degré n.

Proposition 22
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Définition : soit E un K-espace vectoriel de diimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentative de u. On le note χ_u.

4.2 Premières propriétés

Proposition 23
(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\lambda \in K$. $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_A(\lambda) = 0$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in K$. $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_u(\lambda) = 0$.

Proposition 24
(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\det(A)$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\det(u)$.

Remarques

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A possède une racine dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss). Donc $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et n impair, $x \mapsto \chi_A(x)$ possède au moins un zéro par le théorème des valeurs intermédiaires : $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$.

4.3 Sous-espace stable et factorisation du polynôme caractéristique.

Proposition 25
Soient n et r deux entiers tels que $0 < r < n$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(K)$. Alors $\chi_M = \chi_A\chi_C$.

Proposition 26
Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(K)$ est triangulaire, alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})$.

Proposition 27
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $\chi_{u_F} | \chi_u$.

4.4 Ordre de multiplicité

Définitions

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On sait que λ est racine de χ_u. On appelle ordre de multiplicité de λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On sait que λ est racine de χ_A. On appelle ordre de multiplicité de λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_A.

Proposition 28
(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On note m sa multiplicité.

$$1 \leq \dim\left(E_\lambda(u)\right) \leq m \leq n.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On note m son ordre de multiplicité.

$$1 \leq \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq m \leq n.$$

5 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

On suppose E de dimension finie n.

5.1 Définitions

Définitions

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice représentative est diagonale.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est diagonalisable si et seulement elle est semblable à une matrice diagonale.

5.2 Propriétés pour les endomorphismes

Proposition 29
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) u est diagonalisable

(ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$

(iii) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E)$.

Proposition 30
(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{card}((\mathrm{Sp}(u)) = n$ alors u est diagonalisable.
(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Proposition 31
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

5.3 Interprétation matricielle de ces résultats

Proposition 32
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) = A$. A est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Proposition 33
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A. A est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Proposition 34
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) A est diagonalisable

(ii) $\mathcal{M}_{n,1}(K) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$

(iii) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$.

Proposition 35
(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que card$((\mathrm{Sp}(A)) = n$ alors A est diagonalisable.
(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que χ_A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

Proposition 36
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$.

5.4 Applications

5.4.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

5.4.2 Résolution d'équations matricielles

6 Trigonalisation

E est un K-espace vectoriel de dimension finie n.

6.1 Définitions. Premières propriétés

Définitions

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice représentative est triangulaire supérieure.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 37
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$de E telle que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$.

Proposition 38
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) = A$. A est trigonalisable si et seulement si u est trigonalisable.

Proposition 39
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. A est trigonalisable si et seulement si u est trigonalisable.

6.2 Caractérisation

Théorème 1
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.

Théorème 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé.

Proposition 40
(i) Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.
(ii) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Remarque : si u, un endomoprhisme de E, est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres et son déterminant est le produit des valeurs propres.
De même pour une matrice carrée.

6.3 Applications

6.3.1 Calcul de puissances de matrices

6.3.2 Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2