

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS VECTORIELLES

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles.

1.1 Définitions.

Définitions : (dérivabilité en un point.)

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$. Soit $a \in I$. On définit $\varphi : I \setminus \{a\} \rightarrow E$
 $x \mapsto \frac{1}{x-a} (f(x) - f(a)).$

- f est dérivable en a si et seulement si φ admet une limite en a .
- Si cette limite existe, elle est appelée dérivée de f en a et notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.
- Si a n'est pas l'extrémité droite de I , on dit que f est dérivable à droite en a si et seulement si $f|_{]a, +\infty[}$ est dérivable en a .
- Si a n'est pas l'extrémité gauche de I , on dit que f est dérivable à gauche en a si et seulement si $f|_{]-\infty, a]}$ est dérivable en a .
- Si ces limites existent, on les appelle dérivée à droite (resp à gauche) de f en a et on les note $f'_d(a)$ (resp $f'_g(a)$).

Remarque : si f est dérivable en a , si on note $\varepsilon : I \rightarrow E$

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

On a $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$ et pour tout x dans I : $f(x) = f(a) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon(x))$ et donc f est continue en a .

Définition : (développement limité d'ordre 1).

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$. Soit $a \in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre 1 en a s'il existe deux éléments b et c de E tels que $\|f(a+h) - b - hc\| \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h)$ que l'on écrit aussi

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b + hc + o(h).$$

Proposition 1

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$. Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité d'ordre 1 en a .

Si f est dérivable en a , alors f possède un développement limité en a d'ordre 1 qui est donné par $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h)$.

Interprétation cinématique.

Si on note t la variable et qu'on l'appelle le temps, si on note $S = \{f(t) | t \in I\}$ et qu'on l'appelle la trajectoire (du point mobile dont on étudie le mouvement... f est la loi horaire du mouvement) si $t_0 \in I$ et si $f'(t_0)$ existe, $f'(t_0)$ est appelé le vecteur vitesse du point mobile à l'instant t_0 .

Définitions (dérivabilité sur un intervalle.) Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$.

- f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I .
- On définit alors l'application dérivée de f , notée f' (ou Df ou $\frac{df}{dx}$) l'application définie sur I et à valeurs dans E qui à x associe $f'(x)$.
- On note $\mathcal{D}(I, E)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I .

1.2 Opérations.**Proposition 2 (Linéarité)**

$\mathcal{D}(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$ et l'application $D : f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, E)$ dans $\mathcal{F}(I, E)$.

Proposition 3 (Composition par une application linéaire)

Soit $f \in \mathcal{D}(I, E)$. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors $L \circ f \in \mathcal{D}(I, F)$ et $(L \circ f)' = L \circ (f')$.

Proposition 4

Soient f et g dans $\mathcal{D}(I, E)$ et $\mathcal{D}(I, F)$. Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G (E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie). Alors $B(f, g)$ est dans $\mathcal{D}(I, G)$ et

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Corollaire

On suppose que E est un espace euclidien.

Soient f et g dérivables sur I et à valeurs dans E . Alors $(f|g)$ est dérivable sur I et à valeurs réelles et $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$.

Si f est dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I , alors $\|f\|_2$ est dérivable sur I et $\|f\|_2' = \frac{(f|f)'}{\|f\|_2}$.

Exemples.

1. On suppose que E est un espace euclidien.

Soit f dérivable sur I et à valeurs dans F telle que $\|f\|_2 = 1$ (i.e. pour tout t dans I , $\|f(t)\|_2 = 1$).

Alors f et f' sont orthogonales : i.e.

$$\forall t \in I, \quad f(t) \perp f'(t) \quad \text{ou} \quad (f(t)|f'(t)) = 0.$$

2. Soient f et g définies sur I et à valeurs dans \mathbb{R}^3 , dérivables sur I , $f \wedge g$ est dérivable sur I et

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'.$$

Proposition 5

Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $\mathcal{D}(I, F_i)$ où chaque F_i est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $M : F_1 \times \cdots \times F_p \rightarrow G$ multilinéaire (avec G \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie).

Alors $M(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{D}(I, G)$ et

$$M(f_1, \dots, f_p)' = \sum_{i=1}^p M(f_1, \dots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \dots, f_p).$$

Corollaire

(i) Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{K}^p . Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq p} \in (\mathcal{D}(I, \mathbb{K}^p))^p$. $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p)' = \sum_{i=1}^p \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \dots, f_p).$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{D}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. On note $A = (C_1 \cdots C_n)$. Alors $\det(A) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et

$$\det(A)' = \sum_{j=1}^n \det(C_1 \cdots C_{j-1} C_j' C_{j+1} \cdots C_n).$$

Proposition 6 (Composition)

Soit $f \in \mathcal{D}(I, E)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ avec $\varphi(J) \subset I$. Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{D}(J, E)$ et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

1.3 Caractérisation à l'aide d'une base de E .

Proposition 7

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$. On note $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des applications coordonnées (ou composantes) de f relatives à la base \mathcal{B} .

Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, f_i est dérivable en a et si f est dérivable en a ,

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a)e_i.$$

f est dérivable sur I si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, f_i est dérivable sur I et si f est dérivable sur I ,

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \sum_{i=1}^n f'_i(x)e_i.$$

Application : caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur I et dérivables sur l'intérieur de I .

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E) \cap \mathcal{D}(\overset{\circ}{I}, E)$. f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, $f'(x) = 0$.

Exemple. Soit A définie par

$$\begin{aligned} A &: I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ t &\mapsto (a_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \end{aligned}$$

A est dérivable sur I si et seulement si tous les $a_{i,j}$ sont dérivables sur I .

1.4 Fonctions de classe \mathcal{C}^n .

Définitions soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$.

- On définit par récurrence les dérivées successives de f :
 $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on dit que f est n fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I et on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. On note $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. f est de classe \mathcal{C}^n sur I si et seulement si $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $f^{(n)} \in \mathcal{C}(I, E)$. On note $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. On peut aussi noter la dérivée n -ème $D^n f$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.
- f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si et seulement si $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $f \in \mathcal{C}^\infty(I, E)$.

Interprétation cinématique.

Si on note t la variable et qu'on l'appelle le temps, si on note $S = \{f(t) | t \in I\}$ et qu'on l'appelle la trajectoire (du point mobile dont on étudie le mouvement... f est la loi horaire du mouvement) si $t_0 \in I$ et si $f'(t_0)$ existe, $f'(t_0)$ est appelé le vecteur vitesse du point mobile à l'instant t_0 et si $f''(t_0)$ existe, $f''(t_0)$ est appelé le vecteur accélération du point mobile à l'instant t_0 .

Proposition 8 (linéarité)

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

$\mathcal{C}^n(I, E)$ est un espace vectoriel.

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^n(I, E), \forall k \in \{1, \dots, n\}, (\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

Proposition 9 (Composition par une application linéaire)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors $L \circ f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(L \circ f)^{(k)} = L \circ (f^{(k)})$.

Proposition 10 (Formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soient f et g dans $\mathcal{C}^n(I, E)$ et $\mathcal{C}^n(I, F)$ (avec F un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie). Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G (G un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie). Alors $B(f, g)$ est dans $\mathcal{C}^n(I, G)$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} B(f^{(r)}, g^{(k-r)}).$$

Proposition 11 (Composition)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(J)$ avec $\varphi(J) \subset I$. Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(J, E)$ et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

2 Intégration sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$.

2.1 Fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Définitions soit $f \in \mathcal{F}([a, b], E)$.

- On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ de $[a, b]$ telle que :
 - ◊ pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la restriction $f_i = f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ soit continue,
 - ◊ pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on peut prolonger f_i en une fonction \tilde{f}_i continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.
- Une telle subdivision est dite adaptée à f .
- On note $\mathcal{CM}([a, b], E)$ (ou $\mathcal{C}_{mx}([a, b], E)$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E .

Proposition 12

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], E)$. On note $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des applications coordonnées (ou composantes) de f relatives à la base \mathcal{B} .

f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si ses applications coordonnées f_i le sont.

Proposition 13

$\mathcal{CM}([a, b], E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Proposition 14

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . On note $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des applications coordonnées (ou composantes) de f relatives à la base \mathcal{B} . Le vecteur $\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} choisie.

Définition soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$.

- On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le vecteur $\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$ où les f_i sont les applications coordonnées de f dans une base \mathcal{B} de E . (Cette définition est bien indépendante de la base choisie, par la proposition précédente).
- Cette intégrale est notée $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$.

Proposition 15 (Linéarité)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}([a, b], E) & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

Proposition 16 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$. Soit $c \in]a, b[$.

Alors $f \in \mathcal{CM}([a, c], E)$ et $f \in \mathcal{CM}([c, b], E)$ et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Proposition 17

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors $L(f) \in \mathcal{CM}([a, b], F)$ et

$$\int_a^b L(f) = L \left(\int_a^b f \right).$$

Théorème 1 (Sommes de Riemann)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

Proposition 18

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$.

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

2.3 Extension de l'intégrale.

Définition soit $f \in \mathcal{C}_{mx}(I, E)$. Soit $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ - \int_{[b,a]} f & \text{si } b < a. \end{cases}$$

On garde les propriétés de linéarité, la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire (attention aux bornes...)

Proposition 19

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur F . Soit $f \in \mathcal{CM}(I, E)$. $\forall (a, b) \in I^2, \left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \|f\|.$

3 Dérivation et intégration.

3.1 Primitives et intégrale d'une fonction continue.

Définition soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$.

On appelle primitive de f sur I toute application g définie sur I à valeurs dans E telle que

- ◇ g est dérivable sur I
- ◇ $g' = f$.

Proposition 20

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$. Soient g et h deux primitives de f sur I . Alors il existe $k \in E$ tel que $h = g + k$, i.e. $\forall x \in I, h(x) = g(x) + k$.

Théorème 2 (fondamental)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$. Soit $a \in I$.

(i) $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a . Pour toute primitive h de f sur I ,

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a).$$

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^1(I, E), \forall x \in I$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Proposition 21 (Intégration par parties)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Soit $g \in \mathcal{C}^1(I, E)$. $\forall (a, b) \in I^2$

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Proposition 22 (Changement de variable)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ avec $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u)f(\varphi(u))du.$$

3.2 Etude globale des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .**Proposition 23 (Inégalité des accroissements finis)**

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$.

On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in]a, b[, \|f'(t)\| \leq \lambda$. Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda(b - a).$$

Remarque : en général, on n'a pas l'égalité des accroissements finis. On pourra regarder $x \mapsto e^{ix}$.

Interprétation cinématique : si f désigne un mouvement et si la norme de la vitesse entre les instants a et b est majorée par λ alors la distance entre les positions en a et en b est majorée par $\lambda(b - a)$.

Proposition 24

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$.

Supposons que f' possède une limite finie en a , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Proposition 25 (Extension aux applications de classe \mathcal{C}^k)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$, de classe \mathcal{C}^k sur $]a, b[$.

Supposons que pour $l \in \{1, \dots, k\}$, $f^{(l)}$ possède une limite finie en a , alors f est de classe \mathcal{C}^k sur $[a, b]$.

Exemple :

Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

3.3 Formules de Taylor.

Théorème 3 (Taylor avec reste intégral)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Théorème 4 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on pose $M_{n+1}(x) = \sup_{t \in [a, x]} \|f^{(n+1)}(t)\|$. Alors

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(x).$$

Proposition 26 (Développement limité d'une primitive d'une fonction continue)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$. Soit $x_0 \in I$. Si f possède un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + \cdots + (x-x_0)^n a_n + o((x-x_0)^n) \quad [x \rightarrow x_0]$$

et si g est une primitive de f sur I , alors g possède un $DL_{n+1}(x_0)$ donné par :

$$g(x) = g(x_0) + (x-x_0)a_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2} a_1 + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} a_n + o((x-x_0)^{n+1}) \quad [x \rightarrow x_0]$$

Proposition 27 (Développement limité de la dérivée d'une fonction de classe \mathcal{C}^1)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$. Soit $x_0 \in I$. Supposons que f' possède un $DL_n(x_0)$ alors f a un $DL_{n+1}(x_0)$. Plus précisément, si

$$f'(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + \cdots + (x - x_0)^n a_n + o((x - x_0)^n) \quad [x \rightarrow x_0]$$

alors

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2}a_1 + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n + 1}a_n + o((x - x_0)^{n+1}) \quad [x \rightarrow x_0]$$

Corollaire (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. Soit $x_0 \in I$.

Alors f possède un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x - x_0)^n) \quad [x \rightarrow x_0].$$

