FAMILLES SOMMABLES

1 Familles sommables de réels positifs

1.1 Calculs dans $[0, +\infty]$.

• On prolonge $+$ à $[0, +\infty]$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty.$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$

• Pour la multiplication :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty.$
$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty.$

• On prolonge $\leq$ à $[0, +\infty]$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leq (+\infty)$
et $+\infty$ est le seul élément de $[0, +\infty]$ à être plus grand que tout réel positif.
$(+\infty) \leq (+\infty)$.
$\leq$ ainsi prolongée, reste une relation d'ordre.

• Soit $E \subset [0, +\infty]$, $E \neq \emptyset$.
$\star$ Si $E \subset R_+$ et si E est majorée dans $\mathbb{R}_+$, alors E possède une borne supérieure $s \in \mathbb{R}_+$.
$\star$ Si $E \subset R_+$ et si E n'est pas majorée dans $\mathbb{R}_+$, on dit que $+\infty$ est la borne supérieure de E dans $[0, +\infty]$.
$\star$ Si $+\infty \in E$, alors $+\infty$ est la borne supérieure de E dans $[0, +\infty]$.

Théorème 1
Toute partie non vide $\mathbb{R}_+$ (<u>resp</u> $[0, +\infty]$) possède une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

1.2 Somme d'une famille de réels positifs

I est un ensemble, $I \neq \emptyset$.

<u>Définition</u> : soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On appelle <u>somme</u> de cette famille et on note $\sum\limits_{i\in I} u_i$, la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de $\{\sum\limits_{i\in F} u_i \mid F \subset I,\ F \text{ fini}\}$.

<u>Cas particuliers</u>
α <u>I est fini</u>
Si $\forall i \in I$, $u_i \in \mathbb{R}_+$, alors $\sum\limits_{i\in I} u_i \in \mathbb{R}_+$.
S'il existe $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} = +\infty$, alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = +\infty$.

<u>Remarque</u> : ce dernier résultat est encore vrai pour I non fini.

β <u>$I = \mathbb{N}$</u>
En notant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ dans le cas où $\sum u_n$ diverge, on a, dans tous les cas

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 1
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Soit $J \subset I$, $\sum\limits_{i\in J} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.

Proposition 2 (**Permutation de l'ordre de sommation**)
Soit σ une permutation de I. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

1.3 Familles sommables

Définition : soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On dit que cette famille est sommable lorsque $\sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$.

Proposition 3 (**Lien avec les séries**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.
(i) $\sum u_n$ converge $\iff$ (u_n) est sommable.
(ii) Si (u_n) est sommable, sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 4
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs. On suppose que pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$. Alors
(i) $\sum\limits_{i\in I} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} v_i$,
(ii) si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

1.4 Opérations sur les familles sommables

Proposition 5
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs.
(i)

$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

(ii) Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 6
Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i.$$

(ii) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable et

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i.$$

1.5 Sommation par paquets

Théorème 2 (**de sommation par paquets**)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Cas où I est un produit

Théorème 3 (**de Fubini positif**)
Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

2 Familles sommables de nombres complexes

2.1 Définitions

Définition : soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que cette famille est sommable lorsque $\sum\limits_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

Proposition 7
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. (u_n) est sommable si et seulement si $\sum u_n$ est absolument convergente.

Notation : on note $l^1(I) = \{(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I \mid (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable}\}$.

Proposition 8
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable. Soit $J \subset I$. Alors $(u_j)_{j\in J}$ est sommable.

Définition : soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes.
• Si pour tout $i \in I$, $u_i \in \mathbb{R}$, on pose, pour $i \in I$, $u_i^+ = \max(0, u_i)$ et $u_i^- = \max(0, -u_i)$.
$(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont des familles sommables de réels positifs. On définit la somme de $(u_i)_{i\in I}$

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

• Si pour tout $k \in I$, $u_k \in \mathbb{C}$, $(\mathrm{Re(u_k)})_{\mathrm{k\in I}}$ et $(\mathrm{Im(u_k)})_{\mathrm{k\in I}}$ sont des familles sommables de réels. On définit la somme de $(u_k)_{k\in I}$

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re(u_k)} + \mathrm{i}\sum_{\mathrm{k\in I}} \mathrm{Im(u_k)}.$$

Proposition 9
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes, sommable. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une partie finie F de I telle que

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| \leq \varepsilon.$$

Proposition 10
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. (u_n) est sommable si et seulement si $\sum u_n$ est absolument convergente et si c'est le cas, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2.2 Propriétés

Proposition 11
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable. Alors $\left|\sum\limits_{i\in I} u_i\right| \leq \sum\limits_{i\in I} |u_i|$.

Proposition 12 (**Permutation de l'ordre de sommation**)
Soit σ une permutation de I. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes.

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \quad \Longleftrightarrow \quad (u_{\sigma(i)})_{i\in I} \text{ est sommable.}$$

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

Proposition 13 (**Comparaison**)
Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille à termes positifs. On suppose :
- $\forall i \in I$, $|u_i| \leq v_i$,
- $(v_i)_{i\in I}$ est sommable.

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\left|\sum\limits_{i\in I} u_i\right| \leq \sum\limits_{i\in I} |u_i| \leq \sum\limits_{i\in I} v_i$.

Proposition 14 (**Linéarité**)
(i) $l^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{C}^I, +, .)$.
(ii) L'application, $l^1(I) \to \mathbb{C}$, $(u_i)_{i\in I} \mapsto \sum\limits_{i\in I} u_i$, est une forme linéaire.

2.3 Sommation par paquets

Théorème 4 (**de sommation par paquets**)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Alors
- pour tout $j \in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable,
- $\left(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable et
- $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{j\in J} \left(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\right)$.

Théorème 5 (**de Fubini**)
Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de complexes sommable.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Théorème 6 (**Produit**)
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles de complexes sommables. Alors

(i) $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

(ii) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right)$.

Théorème 7 (**Produit généralisé**)
Soit $((u_{k,i_k})_{i_k\in I_k})_{1\leq k\leq n}$ une famille finie de familles sommables. Alors $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n} u_{k,i_k}\right)_{(i_1,\dots,i_n)\in I_1\times\cdots\times I_n}$ est sommable et

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I_1\times\cdots\times I_n}\left(\prod_{k=1}^{n} u_{k,i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_k\in I_k} u_{k,i_k}\right).$$

2.4 Produit de Cauchy

Théorème 8 (**Produit de Cauchy**)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$, appelée produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_p v_q\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$