EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1.1 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : rappels

On s'intéresse à l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ $x'+\alpha(t)x = \beta(t)$ avec α et β continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque : si f est une solution de $(\mathcal{E})$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

On note $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée : $x' + \alpha(t)x = 0$.

Théorème 1
On note φ l'application définie sur I, qui à x associe $e^{-A(x)}$ où A est une primitive de α sur I. Alors l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ est la droite vectorielle engendrée par φ.

Théorème 2
On note φ l'application définie sur I, qui à x associe $e^{-A(x)}$ où A est une primitive de α sur I. On suppose connue une solution f_0 de $(\mathcal{E})$ sur I. Alors l'ensemble des solutions sur I de $(\mathcal{E})$ est l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe λ un scalaire tel que $f = f_0 + \lambda\varphi$.
On peut dire aussi que l'ensemble des solutions sur I de $(\mathcal{E})$ est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I)$ passant par f_0 et dirigé par la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\varphi)$.

Méthode de variation de la constante.
Elle permet de trouver une solution particulière de $(\mathcal{E})$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$. Posons $g = \frac{f}{\varphi}$. Alors $g \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ et f est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si pour tout $t \in I$, $g'(t) = \frac{\beta(t)}{\varphi(t)}$.
On choisit donc g_0 une primitive de $\frac{\beta}{\varphi}$ sur I et $f_0 = g_0\varphi$ est alors une solution de $(\mathcal{E})$.

Remarque : si on s'intéresse à $(\tilde{\mathcal{E}})$ $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où $(a,b,c) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$, on résout comme précédemment sur les intervalles où a ne s'annule pas. On essaie de recoller les solutions en les points où a s'annule.

1.2 Cas général

Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. On s'intéresse à $(\mathcal{E})$ $x' = a(t)(x) + b(t)$.

Définition : les solutions f de $(\mathcal{E})$ sur I sont les fonctions f dérivables sur I à valeurs dans E telles que pour tout $t \in I$, $f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t)$.

Remarque : toute solution de $(\mathcal{E})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition : on appelle équation différentielle homogène associée à $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ $x' = a(t)(x(t))$.

Remarque : principe de superposition.
Soient $(\mathcal{E}_1)$ $x' = a(t)(x) + b_1(t)$ et $(\mathcal{E}_2)$ $x' = a(t)(x) + b_2(t)$. Si f_1 est solution de $(\mathcal{E}_1)$ et f_2 est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors $f_1 + f_2$ est solution de $(\mathcal{E})$: $x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t)$.

Traduction matricielle : systèmes différentiels linéaires.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $t \in I$, on note $A(t) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(a(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(b(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. A et B sont continue sur I.
Soit $f : I \to E$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Pour $t \in I$, on note $X(t) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, $X'(t) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f'(t))$.
f est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si pour tout $t \in I$, $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.
On écrit pour $t \in I$, $A(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, $B(t) = (b_i(t))_{1\leq i\leq n}$ et $X(t) = (x_i(t))_{1\leq i\leq n}$.
Pour $t \in I$, $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & a_{1,1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \cdots & & \cdots \\ x_n'(t) & = & a_{n,1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}.$$

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1.

Proposition 1
Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. On s'intéresse à $(\mathcal{E})$ $x' = a(t)(x) + b(t)$.
(i) L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ (équation homogène associée à $(\mathcal{E})$), $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.
(ii) L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$, $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$, i.e. si f_0 est une solution de $(\mathcal{E})$, alors $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = f_0 + \mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$.

1.3 Théorème de Cauchy linéaire

Définitions : soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. Soit $t_0 \in I$. Soit $x_0 \in E$. On appelle problème de Cauchy et on note

$$\begin{cases} (\mathcal{E}) & x' = a(t)(x) + b(t) \\ & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

la recherche des solutions de $(\mathcal{E})$ vérifiant en plus la condition initiale $f(t_0) = x_0$.

Proposition 2 (**Forme intégrale du problème de Cauchy**)
Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$. f vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) & = & a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)(f(s))ds + \int_{t_0}^{t} b(s)ds.$$

Théorème 3 (**de Cauchy linéaire**)
Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$.
Il existe une unique solution φ de $(\mathcal{E})$ $x' = a(t)(x) + b(t)$ vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$.
Ou encore, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) & = & a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

1.4 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 3
Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$. On s'intéresse à $(\mathcal{E}_0)$ $x' = a(t)(x)$.
(i) L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.
(ii) Soit $t_0 \in I$. $\Phi : \mathcal{S}(\mathcal{E}_0) \to E$, $f \mapsto f(t_0)$ est un isomorphisme.
(iii) $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension $\dim(E)$.

Proposition 4
Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. On s'intéresse à $(\mathcal{E})$ $x' = a(t)(x) + b(t)$.
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$, $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$ et de dimension $\dim(E)$.

2 Equations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants

On s'intéresse à $(\mathcal{E})$ $x' = a(x) + b(t)$ avec $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$.
On passe au système différentiel associé (S) : $X' = AX + B(t)$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1 Résolution de l'équation homogène associée : cas où A est diagonalisable

On s'intéresse à (S_0) : $X' = AX$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose A diagonalisable : il existe D diagonale et P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
Soit $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$. On pose $Y = P^{-1}X$, alors $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ et X est solution de (S_0) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = DY(t)$. On s'est donc ramené à un système différentiel diagonal : on sait résoudre chacune des équations qui le composent.

Proposition 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose A diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $V_1, \ldots, V_n$ des vecteurs propres de A associés aux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivement. Alors $(t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{S}(S_0)$ où (S_0) : $X' = AX$.

Remarque : si A est trigonalisable, on adapte la méthode pour trouver, à la fin, un système différentiel triangulaire. On sait alors le résoudre en résolvant la dernière, en injectant ses solutions dans l'avant dernière et en résolvant cette équation et en remontant ainsi petit à petit.

2.2 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

On munit $\mathcal{L}(E)$ d'une norme sous-multiplicative, i.e. vérifiant pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$,
$\|u \circ v\| \leq \|u\|\|v\|$.
Par exemple, on pose $S = \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}$. S est un compact de E, car E est de dimension finie.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\|u\| = \sup_{x \in S} \|u(x)\|_E$ (qui existe car u est continue - E est de dimension finie - sur le compact S).

Proposition 6 Définition
Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. $\sum \frac{1}{k!} a^k$ est absolument convergente. Sa somme est appelée exponentielle de a et notée $\exp(a)$ ou e^a.

Proposition 7
L'application exp : $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $a \mapsto \exp(a)$ est continue.

Proposition 8
Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$, $t \mapsto \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a.$$

Proposition 9
Soient a et b dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $a \circ b = b \circ a$. Alors

$$\exp(a) \circ \exp(b) = \exp(a + b) = \exp(b) \circ \exp(a).$$

Traduction matricielle

$\|.\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$, $A \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$ est une norme sous-multiplicative.

Proposition 10 Définition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\sum \frac{1}{k!} A^k$ est absolument convergente. Sa somme est appelée exponentielle de A et notée $\exp(A)$ ou e^A.

Proposition 11
Soit $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\exp(A) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

Proposition 12
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, semblables. Alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables.

Proposition 13
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(i) $\exp(\mathrm{Sp}(A)) \subset \mathrm{Sp}(\exp(A))$.
(ii) Si A est trigonalisable, alors $\exp(\mathrm{Sp}(A)) = \mathrm{Sp}(\exp(A))$.

Proposition 14
L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto \exp(A)$ est continue.

Proposition 15
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA) A.$$

Proposition 16
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$. Alors

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B) = \exp(B) \exp(A).$$

2.3 Application aux équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants

Proposition 17
Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$.
$\varphi : \mathbb{R} \to E$, $t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$x' = a(x) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0.$$

Proposition 18
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $t \mapsto \exp((t - t_0)A)(X_0)$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$X' = AX \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0.$$

Remarque : du point de vue pratique, la réduction est mieux que le calcul de l'exponentielle. Cette dernière est intéressante d'un point de vue théorique.

3 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

3.1 Présentation du problème

On s'intéresse à $(\mathcal{E})$ $x^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$ où $(a_k)_{0\leq k\leq n-1} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^n$ et $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$, n-fois dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$,

$$f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)f^{(k)} = b(t).$$

L'équation homogène associée est $(\mathcal{E}_0)$ $x^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = 0$.

Remarque : si f est une solution de $(\mathcal{E})$ sur I, alors $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$.

3.2 Transformation du problème

Soient $(a_k)_{0\leq k\leq n-1} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^n$ et $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. On s'intéresse à $(\mathcal{E})$ $x^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$. Posons, pour $t \in I$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$. Posons, pour $t \in I$, $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$. f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si pour tout $t \in I$, $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.
On a ainsi transformé le problème en la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Proposition 19
(i) $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$.
(ii) Si $f_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$, alors $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = f_0 + \mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$.

Problème de Cauchy
Soit $t_0 \in I$. Soit $(x_k)_{0\leq k\leq n-1} \in \mathbb{K}^n$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathcal{E}) & x^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t) \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!] & x^{(k)}(t_0) = x_k \end{cases}$$

En vectorialisant, il devient, en notant $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} (S) & X' = A(t)X + B(t) \\ & X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème 4 (**de Cauchy linéaire**)
Soient $(a_k)_{0\leq k\leq n-1} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^n$ et $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.
Soit $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$. Il existe une unique solution φ de $(\mathcal{E})$ $x^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$ vérifiant les conditions initiales : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi^{(k)}(t_0) = x_k$.

Proposition 20
Soit $(a_k)_{0\leq k\leq n-1} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^n$.

(i) L'ensemble des solutions, $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$, de $(\mathcal{E}_0)$ $x^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$.
(ii) Soit $t_0 \in I$. $\Phi : \mathcal{S}(\mathcal{E}_0) \to \mathbb{K}^n$, $f \mapsto (f(t_0), \ldots, f^{(n-1)}(t_0))$ est un isomorphisme.
(iii) $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ de dimension n.

Proposition 21
Soient $(a_k)_{0\leq k\leq n-1} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^n$ et $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.
L'ensemble des solutions, $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, de $(\mathcal{E})$ $x^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$.

3.3 Cas particulier $n = 2$

On s'intéresse à $(\mathcal{E})$ $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$ avec $(a_0, a_1, b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$.
Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
$\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K})$ de dimension 2.
$\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K})$ de dimension 2.

3.3.1 Wronskien

Définition : soient φ_1 et φ_2 deux solutions de $(\mathcal{E}_0)$. On appelle wronskien de la famille (φ_1, φ_2) l'application $W_{\varphi_1,\varphi_2} : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$.

Proposition 22
Soit $(a_0, a_1) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$. Soit (φ_1, φ_2) un couple de solutions sur I de $(\mathcal{E}_0)$ $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$. Le wronskien de ce couple est solution sur I de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $x' + a_1(t)x = 0$.

Remarque : cas particulier où $a_1 = 0$. On s'intéresse à $(\mathcal{E}_0)$ $x'' + q(t)x = 0$ où $q \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. Pour $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_0)^2$, W_{φ_1,φ_2} est constant sur I.

Retour au cas général

Proposition 23
Soit $(a_0, a_1) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^2$. Soit (φ_1, φ_2) un couple de solutions sur I de $(\mathcal{E}_0)$ $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$.On note W le wronskien de ce couple. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$.
(ii) $\exists t \in I$, $W(t) \neq 0$.
(iii) $\forall t \in I$, $W(t) \neq 0$.

Méthode du wronskien
Supposons connue une solution φ_1 de $(\mathcal{E}_0)$, qui ne s'annule pas sur I. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$. Posons $f = \frac{\varphi}{\varphi_1}$.
Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$, alors $f' = \frac{W(\varphi_1, \varphi)}{\varphi_1^2}$. Or on peut trouver $W(\varphi_1, \varphi)$ à une constante près (avec l'avant dernière proposition) puis f à deux constantes près, et donc φ à deux constantes près.

3.3.2 Méthode de Lagrange

On parle aussi d'abaissement du degré ou de variation de la constante.
Supposons connu une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur I qui ne s'annule pas sur I. On la note φ.
On cherche les solutions de $(\mathcal{E})$ de la forme $x = y\varphi$. x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I si et seulement si y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et x est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si y' est solution de $(\tilde{\mathcal{E}})$ sur I, où $(\tilde{\mathcal{E}})$ est $\varphi z' + (2\varphi' + a_1\varphi)z = b(t)$.
$(\tilde{\mathcal{E}})$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont le coefficient devant z' ne s'annule pas : on sait la résoudre. On connaît donc y', donc y, donc x.

3.3.3 Recherche de solutions développables en séries entières

3.3.4 Méthode de variation des constantes

Supposons connue une base (φ_1, φ_2) de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée. On cherche une solution particulière f de $(\mathcal{E})$ de la forme $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ avec λ_1 et λ_2 dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et en imposant en plus $\lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 = 0$. On vérifie alors que f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si pour tout $t \in I$

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)\varphi_1(t) + \lambda_2'(t)\varphi_2(t) &= 0 \\ \lambda_1'(t)\varphi_1'(t) + \lambda_2'(t)\varphi_2'(t) &= b(t) \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est le wronskien de (φ_1, φ_2) évalué en t. Ce système est donc de Cramer, il en existe une solution (unique). On peut donc trouver λ_1' et λ_2'. Il reste à primitiver ces deux fonctions sur I.

3.3.5 Exemple d'équation non résolue

On résout comme précédemment là où le coefficient devant x'' ne s'annule pas. On essaie ensuite de recoller les solutions en les points où ce coefficient s'annule.