CALCUL DIFFERENTIEL ET OPTIMISATION

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de E et à valeurs dans F.

1 Différentielle

1.1 Dérivée selon un vecteur

Définitions Soit $f : U \to F$. Soit $v \in E \setminus \{0\}$. Soit $a \in U$.
On dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur v lorsque $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.
Si c'est le cas, on appelle dérivée de f en a selon v et on note $D_v f(a)$ la dérivée en 0 de $t \mapsto f(a+tv)$.

Remarques

1. $t \mapsto f(a+tv)$ est bien définie sur un voisinage de 0 car U est un ouvert.
2. Si $E = \mathbb{R}$, f est dérivable en a selon v si et seulement si f est dérivable en a et si c'est le cas, $D_v f(a) = vf'(a)$.

Définitions Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à la j-ième variable, relativement à la base $\mathcal{B}$, lorsque f admet une dérivée en a selon le vecteur e_j.
Si c'est le cas, on appelle dérivée partielle en a suivant la j-ième variable relativement à $\mathcal{B}$, et on note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ou $\partial_j f(a)$, la dérivée de f en a selon e_j.

Définitions Soit $f : U \to F$. Soit $v \in E \setminus \{0\}$.
Si f admet une dérivée en a selon v en tout point a de $A \subset U$, on note $D_v f : A \to F$, $a \mapsto D_v f(a)$.
C'est la dérivée de f selon v.
De même avec les dérivées partielles relativement à une base, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pour $i = 1 \cdots n$.

1.2 Application différentiable

Définition Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$. On dit que f est différentiable en a lorsqu'il existe une application linéaire φ de E vers F telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(h)$, $[h \to 0]$, i.e.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall h \in E, \qquad \|h\| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad \|f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Remarque Si une telle application φ existe, alors elle est unique.

Définition Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$. Supposons f différentiable en a. L'unique application linéaire $\varphi : E \to F$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(h)$ $[h \to 0]$ est appelée la différentielle de f en a (ou l'application linéaire tangente en a à f) on la note $df(a)$.

Remarque Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de F. On note $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ la famille des applications coordonnées de f dans cette base.
Alors f est différentiable en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ f_i est différentiable en a.
Si f est différentiable en a, alors $df(a) = \sum\limits_{i=1}^{p} df_i(a)e_i$.

Proposition 1
Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Proposition 2
Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet en a une dérivée selon tout vecteur v non nul de E et

$$D_v f(a) = df(a)(v).$$

Remarque : la réciproque est fausse. Il existe des fonctions possédant des dérivées selon tous les vecteurs qui ne sont pas différentiables.

Définitions Soit $f : U \to F$.
On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point a de U.
Si c'est le cas, on appelle différentielle de f, et on note df, l'application $U \to \mathcal{L}(E,F)$, $a \mapsto df(a)$.

Cas particuliers
Proposition 3
Soit $f : U \to F$, f constante. Alors f est différentiable sur U et $df = 0$.

Proposition 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit U un ouvert de E. f est différentiable sur U et $df : U \to \mathcal{L}(E,F)$, $a \mapsto f$.

Proposition 5
On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$. f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a. Si c'est le cas, $f'(a) = df(a)(1)$.

Proposition 6
Soit $f : U \to F$. Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E.
(i) Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ f possède une dérivée partielle suivant la j-ième variable en a et

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a)(e_j).$$

(ii) Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ f possède une dérivée partielle suivant la j-ième variable en a et

$$\begin{array}{rcccl} df(a) & : & E & \to & F \\ & & h & \mapsto & \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{array} \qquad \text{si} \quad h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j.$$

Définition Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Soit $a \in U$. Supposons f différentiable en a. La matrice jacobienne de f en a est la matrice représentative de $df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. On la note $Jf(a)$. On a

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

1.3 Opérations sur les applications différentiables

Proposition 7 (**Linéarité de la différentielle**)
Soient f et $g : U \to F$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
(i) Soit $a \in U$. Si f et g sont différentiables en a, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

(ii) Si f et g sont différentiables sur U, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur U et

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg.$$

Proposition 8
Soient G et H deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient $f : U \to F$ et $g : U \to G$. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire.
(i) Soit $a \in U$. Supposons f et g différentiables en a. Alors $B(f, g)$ est différentiable en a et pour $h \in E$

$$d(B(f, g))(a)(h) = B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h)).$$

(ii) Supposons f et g différentiables sur U, alors $B(f, g)$ est différentiable sur U.

Proposition 9
Soit $(E_k)_{1 \le k \le p}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(f_k)_{1 \le k \le p}$ une famille d'applications de U vers E_k, U étant un ouvert de E. Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$, p-linéaire.
(i) Soit $a \in U$. On suppose chaque f_k différentiable en a. Alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est différentiable en a et pour $h \in E$,

$$d(M(f_1, \ldots, f_p))(a)(h) = \sum_{k=1}^{p} M(f_1(a), \ldots, f_{k-1}(a), df_k(a)(h), f_{k+1}(a), \ldots, f_p(a)).$$

(ii) Si chaque f_k est différentiable sur U, alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est différentiable sur U.

Théorème 1 (**Composition**)
Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : U \to F$. Soit $g : V \to G$, avec V ouvert de F. On suppose que $f(U) \subset V$.
(i) Soit $a \in U$ tel que f soit différentiable en a et g soit différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

(ii) Si f est différentiable sur U et si g est différentiable sur V, alors $g \circ f$ est différentiable sur U.

Proposition 10
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. Soit $\gamma : I \to U$. Soit $f : U \to F$. Soit $t \in I$. On suppose γ dérivable en t et f différentiable en $\gamma(t)$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

Interprétation géométrique
Soit Γ la courbe paramétrée par γ.
Soit t_0 un paramètre régulier. Γ possède une tangente en $\gamma(t_0)$ dirigée par $\gamma'(t_0)$. Alors $\tilde{\Gamma} = f(\Gamma)$ courbe image de Γ par f est paramétrée par $f \circ \gamma$. Supposons que $df(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)) \neq 0$: t_0 est donc aussi un paramètre régulier de $\tilde{\Gamma}$ et la tangente à $\tilde{\Gamma}$ en $(f \circ \gamma)(t_0)$ est dirigée par $(f \circ \gamma)'(t_0) = df(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0))$ image par $df(\gamma(t_0))$ de $\gamma'(t_0)$ qui dirige la tangente à Γ en $\gamma(t_0)$. D'où le nom d'application linéaire tangente pour $df(\gamma(t_0))$.

Proposition 11
Supposons que $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$.
Soit $f : U \to F$. Soit $g : V \to G$, avec V ouvert de F. On suppose que $f(U) \subset V$. Soit $a \in U$.
Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a).$$

Théorème 2
Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : U \to F$. Soit $g : V \to G$, avec V ouvert de F. On suppose que $f(U) \subset V$. Soit $a \in U$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. ($\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$.) On suppose f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a))$$

les f_i étant les applications coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Règle de la chaîne
$E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}$.
Soit $f : U \to G$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Pour $i = 1 \cdots n$, soit $x_i : V \to \mathbb{R}$, V ouvert de $\mathbb{R}^p$.
On pose $g : V \to \mathbb{R}^n$, $u \mapsto (x_1(u), \ldots, x_n(u))$. On suppose que $g(V) \subset U$. Alors $f \circ g$ est définie sur V.
Supposons f différentiable sur U et g différentiable sur V, alors $f \circ g$ est différentiable sur V et pour $i = 1 \cdots p$,

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial u_i}(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u_1, \ldots, u_p) \frac{\partial f}{\partial x_j} x_1(u_1, \ldots, u_p), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_p)).$$

On peut écrire de manière plus concise

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}.$$

Exemple des coordonnées polaires

1.4 Gradient

On suppose que E est muni d'un produit scalaire. E est donc un espace euclidien.

Théorème 3
On suppose que E est muni d'un produit scalaire $(. \mid .)$: $(E, (. \mid .))$ est donc un espace euclidien. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire sur E. Alors il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = (v \mid x)$.

Définition Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a. Alors $df(a) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Il existe donc un unique vecteur $v \in E$ tel que pour tout $h \in E$, $df(a)(h) = (v \mid h)$.
v est appelé le gradient de f en a et est noté $\nabla f(a)$.
On a donc

$$\forall h \in E, \quad df(a)(h) = (\nabla f(a) \mid h).$$

Proposition 12
Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E. Alors

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j.$$

Proposition 13
Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a et $\nabla f(a) \neq 0$. $v \mapsto D_v f(a)$ est maximale sur $\{v \in E \mid \|v\| = 1\}$ en $v = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|} \nabla f(a)$ et uniquement en ce vecteur.

Interprétation géométrique : $\nabla f(a)$ donne la directions selon laquelle f croît le plus vite au voisinage de a.

2 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

2.1 Définition, lien avec les dérivées partielles

<u>Définition</u> Soit $f : U \to F$. On dit que f est de <u>classe $\mathcal{C}^1$ sur U</u> lorsque f est différentiable sur U et lorsque df est continue sur U.
On note <u>$\mathcal{C}^1(U,F)$</u> l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans F.

Théorème 4
Soit $f : U \to F$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f possède des dérivées partielles relativement à $\mathcal{B}$ en tout point de U et ces dérivées partielles sont continues sur U.

2.2 Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 14
$\mathcal{C}^1(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(U,F),+,.)$.

Proposition 15
Soient G et H deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : U \to F$ et $g : U \to G$. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(U,G)$. Alors $B(f,g) \in \mathcal{C}^1(U,H)$.

Proposition 16
Soit $(E_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(f_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille d'applications de U vers E_k, U étant un ouvert de E. Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$, p-linéaire.
Si chaque f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $M(f_1,\ldots,f_p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème 5 (Composition)
Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(V,G)$, V ouvert de F, avec $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U,G)$.

2.3 Lien avec l'intégration

Théorème 6
Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $\gamma : [0,1] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, γ à valeurs dans U. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))dt.$$

<u>Cas particulier</u> $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) = a + tv$. Alors, $f(a+v) - f(a) = \int_0^1 df(a+tv)(v)dt$.

Théorème 7
Soit U un ouvert connexe par arcs de E. Soit $f : U \to F$. f est constante si et seulement si f est différentiable et $df = 0$.

2.4 Vecteurs tangents à une partie

Définition : soit X une partie de E. Soit $x \in X$. Soit $v \in E$. On dit que v est tangent à X en x lorsqu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$, dérivable en 0 tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Notation : on note T_xX l'ensemble des vecters tangents à X en x.

Exemples

α. Soit X un sous-espace affine de E de direction V. Alors pour tout $x \in X$, $T_xX = V$.

β. On suppose E euclidien. X est la sphère de centre a et de rayon R. Alors pour tout $x \in X$, $T_xX = (x-a)^\perp$.

γ. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$, différentiable.
Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U,\ z = f(x,y)\}$. Soit $a = (a_1, a_2, f(a_1,a_2)) \in S$.
On note $\tilde{a} = (a_1, a_2)$. Alors

$$T_aS = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_3 = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{a}) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{a}) \right\}.$$

Théorème 8 (**Espace tangent à une partie définie par une équation**)
Soit $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E. On pose $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
On suppose $X \neq \emptyset$. Soit $x \in X$ tel que $dg(x) \neq 0$. Alors

$$T_xX = \mathrm{Ker}(dg(x)).$$

Cas particulier : E euclidien

Théorème 9
Soit $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E. On pose $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
On suppose $X \neq \emptyset$. Soit $x \in X$ tel que $\nabla g(x) \neq 0$. Alors

$$T_xX = \nabla g(x)^\perp.$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a, pour $x \in X$, avec $\nabla g(x) \neq 0$,

$$T_xX = \left\{ (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) h_i = 0 \right\}.$$

Cas particulier : $n = 3$

Soit S une surface définie par une équation cartésienne $g(x,y,z) = 0$, avec $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Soit $A \in S$ avec $\nabla g(A) \neq 0$. T_AS est un plan vectoriel. On appelle plan tangent à S en A le plan affine $A + T_AS$.

3 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

3.1 Dérivées partielles d'ordre k

Définitions : soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f : U \to F$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(j_1, \ldots, j_k) \in [\![1, n]\!]^k$. Lorsqu'elle existe $\partial_{j_1}(\partial_{j_2}(\cdots \partial_{j_k} f \cdots))$ est appelée dérivée partielle de f selon les indices $(j_1, \ldots, j_k)$ et elle est notée $\partial_{j_1}\partial_{j_2} \cdots \partial_{j_k} f$ ou $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial_{j_k}}$.

On appelle dérivée partielle de f d'ordre k une dérivée partielle de f selon une liste d'indices de longueur k.

Définitions Soit $f : U \to F$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U lorsque ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.

On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U à valeurs dans F.

$\mathcal{C}^\infty(U, F) = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \mathcal{C}^k(U, F)$.

Remarque pour $k = 1$, on retrouve bien une caractérisation de l'assertion "être de classe $\mathcal{C}^1$".

Remarque Ces notions sont bien indépendantes de la base choisie.

3.2 Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition 17

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. $\mathcal{C}^k(U, F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(U, F), +, .)$.

Proposition 18

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soient G et H deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : U \to F$ et $g : U \to G$. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. On suppose que $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(U, G)$. Alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(U, H)$.

Proposition 19

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'applications de U vers E_i, U étant un ouvert de E. Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$, p-linéaire. Si chaque f_i est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Théorème 10 (Composition)

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(V, G)$, V ouvert de F, avec $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(U, G)$.

3.3 Théorème de Schwarz

Théorème 11 (de Schwarz)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $\forall a \in U, \quad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

3.4 Exemple d'équations aux dérivées partielles

4 Optimisation

4.1 Etude au premier ordre

Définitions : soit $A \subset U$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$. Soit $a \in A$.
- f admet un maximum local en a lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in B(a,r) \cap A$, $f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum local en a lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in B(a,r) \cap A$, $f(x) \geq f(a)$.
- f admet un extremum local en a si f présente un maximum local ou un minimum local en a.

Remarque : un minimum (global) est un minimum local (idem pour un maximum).

Définition Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a. On dit que f est un point critique de f lorsque $df(a) = 0$.

Proposition 20
Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ tel que f soit différentiable en a. Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f i.e. $df(a) = 0$.

4.2 Optimisation sous contrainte

Proposition 21
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de E. Soit $X \subset U$. On suppose que :
- $f_{|X}$ admet un extremum local en x
- f est différentiable en x.

Alors pour tout $v \in T_xX$, $df(x)(v) = 0$.

Théorème 12 (**Optimisation sous contrainte**)
Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, U ouvert de E. On note $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
Soit $x \in X$ tel que $dg(x) \neq 0$ et $f_{|X}$ admet un extremum local en x. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(x) = \lambda dg(x)$.

Cas particulier si E est euclidien, on peut réécrire le résultat :
si $f_{|X}$ admet un extremum local en x alors $\nabla f(x) \in (T_xX)^\perp$.

4.3 Etude au second ordre

Définition : soit $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soit $a \in U$. On appelle matrice hessienne de f en a et on note $H_f(x)$, la matrice carrée de taille n $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, i.e.

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Remarque : d'après le théorème de Schwarz, $H_f(a) \in S_n(\mathbb{R})$.

Théorème 13 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soit $a \in U$.

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad [h \to 0]$$

ou encore

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2}(H_f(a)h \mid h) + o(\|h\|^2) \quad [h \to 0].$$

Application à l'étude des extrema locaux

Théorème 14 (**Condition nécessaire du second ordre**)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
On suppose que f admet un minimum local en a. Alors
(i) a est un point critique de f : $df(a) = 0$,
(ii) $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Remarque pour un maximum local en a, $H_f(a) \in S_n^-(\mathbb{R})$.

Théorème 15 (**Condition suffisante du second ordre**)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
On suppose que
- a est un point critique de f, i.e. $df(a) = 0$,
- $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors, f admet un minimum local strict en a.

Remarque si a est un point critique et si $H_f(a) \in S_n^{--}(\mathbb{R})$, alors f admet un maximum local strict en a.

Théorème 16 (**n=2**)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $a \in U$ tel que $df(a) = 0$. On pose (notation de Monge)

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r + t \geq 0$, alors f présente un minimum local strict en a.
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r + t \leq 0$, alors f présente un maximum local strict en a.
3. Si $rt - s^2 < 0$, alors f ne présente pas d'extremum local en a (on parle de point col ou de point selle).

Remarque si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire en général.