SERIES ENTIERES

1 Analycité

Proposition 1
Soit f une fonction développable en série entière sur $D(a,R)$, alors pour tout $b \in D(a,R)$, f est développable en série entière sur $D(b, R-|a-b|)$.

2 Principe des zéros isolés

Proposition 2
Soit f développable en série entière sur $D(0,R)$. On suppose qu'il existe une suite (z_p) d'éléments non nuls de $D(0,R)$ convergeant vers 0 telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(z_p) = 0$. Alors $f = 0$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Proposition 3
Si f est non nulle et développable en série entière sur $D(a,R)$, alors pour tout $r \in [0, R[$, f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $D'(a,r)$.

3 Expression intégrale des coefficients

Proposition 4
Soit f une fonction développable en série entière sur $D(a,R)$. On écrit $\sum a_n(z-a)^n$ le développement en série entière de f au voisinage de a. On a pour tout $r \in [0, R[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r^n a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt.$$

Théorème 1 de Liouville
Soit f une fonction entière, i.e. développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On suppose f bornée. Alors f est constante.

4 Parseval

Proposition 5
Soit f une fonction développable en série entière sur $D(0,R)$. On écrit $\sum a_n z^n$ le développement en série entière de f. On a pour tout $r \in [0, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt.$$

Théorème 2 Principe du maximum
Soit f une fonction développable en série entière sur $D(0,R)$. On suppose que $|f|$ possède un maximum en 0, alors f est constante.