ESPACES PREHILBERTIENS

On rappelle qu'un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

1 Théorème des fermés emboîtés

Théorème 1
Soit E un espace vectoriel normé complet. Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre converge vers 0. Alors il existe un unique $x \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit x_n dans F_n. Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy, puis conclure.

2 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 2
Soit H un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé de H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $u \in C$ tel que
(i) $\forall y \in C,\ \|x-u\| \leq \|x-y\|$,
(ii) $\forall y \in C,\ (x-u|y-u) \leq 0$.

Soit $x \in H$. Notons $\delta = d(x, C)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $F_n = C \cap B'\left(x, \delta + \frac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que (F_n) vérifie les hypothèses du théorème des fermés emboîtés.

On note donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = \{u\}$.

2. Montrer que (i) est vérifiée.
3. Montrer alors que (ii) est vérifiée. On pourra prendre $y \in C$, utiliser $z = tu + (1-t)y$ avec $t \in]0,1[$, puis choisir t judicieusement.
4. Conclure.

3 Supplémentaire orthogonal d'un fermé

Théorème 3
Soit H un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace vectoriel de H. On suppose que F est fermé. Alors

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

4 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 4
Soit H un espace de Hilbert. Soit f une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $f(x) = (y|x)$.

Vérifier qu'on peut appliquer le théorème précédent à $\mathrm{Ker}(f)$.

5 Adjoint d'une application linéaire continue

Théorème 5
Soit H un espace de Hilbert. Soit f un endomorphisme continu de H. Alors f admet un adjoint.

Soit f un endomorphisme continu de H. Soit $x \in H$. $\theta : y \mapsto (x|f(y))$. Montrer que θ est une forme linéaire continue sur H et utiliser le théorème de représentation de Riesz.

6 Exemple : $l^2(\mathbb{R})$

6.1 $l^2(\mathbb{R})$ est complet

Soit (u_p) une suite de Cauchy de $l^2(\mathbb{R})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_{p,n})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs réelles.

$\mathbb{R}$ étant complet, elle converge. On note v_n sa limite. On a ainsi construit une suite $v = (v_n)$ de réels.

2. Montrer que $v \in l^2(\mathbb{R})$.
   On pourra montrer que la suite des sommes partielles de $\sum v_n^2$ est majorée.
3. Montrer que (u_p) converge vers v dans $l^2(\mathbb{R})$.

6.2 Exemple d'endomorphisme n'admettant pas d'adjoint

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $e_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$.
On définit $g : l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R})$, $u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}(e_0 + e_n)$.

1. Montrer que g est un endomorphisme de $l^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que g est continue.
3. Montrer que g possède un adjoint et donner son adjoint.
4. On pose $E = g(l^2(\mathbb{R}))$ et $f : E \to E$, $u \mapsto g(u)$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E continu.
   (b) Montrer que f n'admet pas d'adjoint.