CONVEXITE

1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1 Barycentre

Définitions : soit $(x_i)_{1\leq i\leq p} \in E^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$.

On appelle barycentre des points pondérés $((x_i, \lambda_i))_{1\leq i\leq p}$ l'élément $\frac{1}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.

Si tous les λ_i sont égaux, on parle d'isobarycentre, qui vaut alors $\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_i$.

Pour $p = 2$, on parle alors de milieu.

Exemples

α. L'isobarycentre des racines n-ièmes de l'unité est nul (pour $n \geq 2$).

β. Le centre de gravité d'un triangle de sommets A, B et C d'affixes respectives a, b et c est le point d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$. C'est l'isobarycentre des points A, B et C.

γ. L'espérance d'une varaible aléatoire réelle X prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$ n'est autre que le barycentre des réels $x_1, \ldots, x_n$ pondérés par leurs probabilités i.e. $(x_i, \mathbb{P}(X = x_i))_{1\leq i\leq n}$.

δ. En physique, on parle de centre de masse

.

Remarque : on ne change pas le barycentre en multipliant toutes les masses par le même réel $\mu \neq 0$.

Proposition 1 (**Associativité**)
Soient $((x_i, \lambda_i))_{1\leq i\leq p}$ et $((y_i, \mu_i))_{1\leq i\leq q}$ deux familles de points pondérés. On note $s_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ et $s_2 = \sum_{i=1}^{q} \mu_i$. On suppose que $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ et $s_1 + s_2 \neq 0$.
Alors le barycentre de la famille de points pondérés $((x_1, \lambda_1), \ldots, (x_p, \lambda_p), (y_1, \mu_1), \ldots, (y_q, \mu_q))$ est le barycentre des points pondérés (b_1, s_1), (b_2, s_2) où b_1 et b_2 sont les barycentres respectifs de $((x_i, \lambda_i))_{1\leq i\leq p}$ et $((y_i, \mu_i))_{1\leq i\leq q}$.

Remarques

1. L'ensemble des barycentres de deux points A et B distincts est la droite (AB), i.e. $A+ \operatorname{Vect}(\overrightarrow{AB})$.
2. Si A, B et C ne sont pas alignés, l'ensemble des barycentres de A, B et C est le plan (ABC) i.e. $A+ \operatorname{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Définition : on appelle barycentre à coefficients positifs des points $x_1, \ldots x_p$ tout élément de la forme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \in (\mathbb{R}_+)^p$ avec $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Remarques

1. Pour deux points A et B, l'ensemble des barycentres à coefficients positifs est $[A, B]$.
2. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, pour $c \in [a, b]$, $c = \frac{c-b}{a-b}a + \frac{a-c}{a-b}b$.

1.2 Parties convexes

Définition : une partie C de E est convexe lorsque

$$\forall (a, b) \in C^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \qquad \lambda a + (1 - \lambda)b \in C.$$

Exemples

α. Tout sous-espace vectoriel (resp affine) de E est convexe.

β. Si $\|.\|$ est une norme sur E, pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(a, r)$ et $B'(a, r)$ sont convexes.

γ. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 2
Soit $C \subset E$. C est convexe si et seulement si C est stable par passage au barycentre à coefficients positifs.

2 Enveloppe convexe

2.1 Définition

Définition : soit A une partie de E. On appelle enveloppe convexe de A l'intersection de toutes les parties convexes contenant A.
E est une partie convexe contenant A, donc l'enveloppe convexe de A est bien définie.

Proposition 3
Soit A une partie de E. L'enveloppe convexe de A est une partie convexe de E et c'est la plus petite partie convexe de E (au sens de l'inclusion) qui contient A.

Proposition 4
Soit A une partie de E. L'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'un nombre fini d'éléments de A.

2.2 Théorème de Carathéodory

Théorème 1
On suppose E de dimension finie n. Soit A une partie de E. L'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres à masses positives d'au plus $n + 1$ points de A.

Proposition 5
Soit A une partie compacte de E, alors l'enveloppe convexe de A est compacte.