COMPACITE

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1 Théorème de Borel-Lebesgue

1.1 Définition

Soit X une partie de E. On appelle <u>recouvrement ouvert</u> de X toute famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que

1. $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$
2. $\forall i \in I$, Ω_i est un ouvert de E.

1.2 Enoncé

Théorème 1
Soit X une partie de E. X est compacte si et seulement si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

1.3 Démonstration

1. Supposons que de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini. Soit (x_n) une suite d'éléments de X. Montrer par l'absurde que (x_n) possède une valeur d'adhérence dans X.

2. Supposons X compacte. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X.
   (a) Montrer par l'absurde qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_i$.

   (b) On choisit un tel ε. Montrer par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots a_N$ des éléments de X tels que $(B(a_k, \varepsilon))_{1\leq k\leq N}$ soit un recouvrement de X.

   (c) Conclure.

2 Théorème de Riesz

2.1 Enoncé

Théorème 2
E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

2.2 Démonstration

Il suffit de démontrer que si la boule unité fermée est compacte alors E est de dimension finie, l'autre implication étant immédiate.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ élements de E tels que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{1}{2}\right)$.

On pose $V = \text{Vect}(a_1, \ldots, a_n)$. V est de dimension finie. On veut montrer par l'absurde que $V = E$. On choisit donc $x \in E$ avec $x \notin V$.

2. Montrer que $d(x, V) > 0$. On pose $\varepsilon = d(x, V) > 0$.

3. Montrer qu'il existe $y \in V$ tel que $\varepsilon \leq \|x - y\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon$.

On pose $z = \frac{1}{\|x-y\|}(x - y)$.

4. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|z - a_i\| \leq \frac{1}{2}$.

5. Etablir $\|x - y\| \times \|z - a_i\| \geq \varepsilon$ et conclure à une contradiction.

2.3 Conséquences

1. Montrer que, dans un espace vectoriel normé qui n'est pas de dimension finie, aucune sphère n'est compacte.

2. Montrer que, dans un espace vectoriel normé qui n'est pas de dimension finie, tout compact est d'intérieur vide.

3. On suppose que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé qui n'est pas de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que pour tout borné B de E, $\overline{f(B)}$ est compacte dans E. Montrer que f n'a pas d'inverse pour $\circ$ dans $\mathcal{L}_c(E)$.