Programme de colles
PSI
du 6 février au 3 mars 2017.

1 Espaces euclidiens.

1.1 Espaces préhilbertiens réels.

Produit scalaire réel : inégalité de Cauchy-Schwarz (et cas d'égalité), inégalité de Minkowski (et cas d'égalité), norme associée au produit scalaire.
Orthogonalité. Pour les vecteurs : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, famille orthonormale, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, théorème de Pythagore. Pour les sous-espaces vectoriels : sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel, en somme directe avec le sous-espace vectoriel de départ. Supplémentaires orthogonaux, unicité du supplémentaire orthogonal, s'il existe. Projecteurs orthogonaux. Somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels.

1.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Projection orthogonale sur une droite, existence de bases orthonormales en dimension finie, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie, inégalité de Bessel ; procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1.3 Espaces euclidiens.

Définitions, existence du supplémentaire orthogonal, existence de b.o.n., théorème de la b.o.n. incomplète ; calcul dans une b.o.n. ; formes linéaires sur un espace euclidien.

2 Séries entières.

2.1 Rayon de convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence ; détermination du rayon, comparaison, $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence, rayon et opérations sur les séries (addition, multiplication par un scalaire et produit de Cauchy).