

Programme de colles

PSI

du 5 au 16 février 2018

Oral blanc.

1 Espaces euclidiens.

1.1 Espaces préhilbertiens réels.

Produit scalaire réel : inégalité de Cauchy-Schwarz (et cas d'égalité), inégalité de Minkowski (et cas d'égalité), norme associée au produit scalaire.

Orthogonalité. Pour les vecteurs : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, famille orthonormale, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, théorème de Pythagore. Pour les sous-espaces vectoriels : sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel, en somme directe avec le sous-espace vectoriel de départ. Supplémentaires orthogonaux, unicité du supplémentaire orthogonal, s'il existe. Projecteurs orthogonaux. Somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels.

1.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Projection orthogonale sur une droite, existence de bases orthonormales en dimension finie, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie, inégalité de Bessel ; procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1.3 Espaces euclidiens.

Définitions, existence du supplémentaire orthogonal, existence de b.o.n., théorème de la b.o.n. incomplète ; calcul dans une b.o.n. ; formes linéaires sur un espace euclidien.

2 Etude des endomorphismes orthogonaux ou symétriques.

2.1 Endomorphismes symétriques, orthogonaux.

Définitions, groupe orthogonal, matrices orthogonales, groupe orthogonal et déterminant, orientation, produit vectoriel.

2.2 Réduction des endomorphismes symétriques et classification des automorphismes orthogonaux en dimension 2 ou 3.

Théorème spectral pour les endomorphismes symétriques et version matricielle. L'étude des quadriques n'est plus au programme. Isométrie vectorielle d'un plan euclidien orienté, isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3 orienté.