Programme de colles : PSI du 11 au 22 décembre 2017 : oral blanc

1 Réduction I.

1.1 Sous-espaces stables.

Définition et traduction matricielle, si deux endomorphismes commutent le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

1.2 Polynômes d'endomorphisme, polynômes de matrices.

Définition propriétés (morphisme d'algèbre sans le dire, ce n'est plus au programme). Polynômes annulateurs (la structure d'idéal n'est plus au programme). Exemple d'utilisation de polynômes annulateurs : calcul des puissances d'une matrice.

1.3 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme ou d'un matrice.

Définitions, en dimension finie λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda Id_E) = 0$, si u et v commutent les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre, des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre, si λ est valeur propre de u et si P est un polynôme annulateur de u, les valeurs propres de u sont des racines de P. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée : par définition, les éléments propres d'une matrice carrée de taille n sont les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à cette matrice.

1.4 Polynôme caractéristique.

Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (attention, il s'agit maintenant du polynôme associé à $x \mapsto \det(xId_E - f)$ ou $x \mapsto \det(xI_n - A)$), liens entre polynôme caractéristique et valeurs propres, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley-Hamilton (admis).

2 Réduction II.

2.1 Diagonalisation

Définitions : pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base dans laquelle la matrice représentative est diagonale ; pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle est semblable à une matrice diagonale. Caractérisations : f est diagonalisble si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace, si et seulement si χ_f est scindé et pour tout λ dans le spectre de f, l'ordre de multiplicité de λ est égale à la dimension du sous espace propre associé à λ. Traduction matricielle de ces propriétés. Applications : calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, résolution d'équations matricielles.

2.2 Diagonalisation et polynôme annulateur.

f est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples (admis), ou si et seulement si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ annule f. Traduction matricielle.

2.3 Trigonalisation.

Définitions : f est trigonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est triangulaire supérieure ; A est trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Traduction matricielle.

Pas de technique de trigonalisation au programme : on se limite à des exemples en petite dimension et les exercices doivent comporter des indications.