Programme de colles

MPI

du 18 au 22 mars 2024.

1 Calcul différentiel et optimisation.

E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Les applications sont définies sur U ouvert de E et à valeurs dans F.

1.1 Différentielle

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles selon une base. Application différentiable, différentielle ; la différentiabilité implique la continuité, lien avec la dérivée selon un vecteur, écriture de la différentielle à l'aide des dérivées partielles premières. Cas particuliers des applications constantes, des applications linéaires et équivalence à la dérivabilité si $E = \mathbb{R}$. Jacobienne. Opérations sur les applications différentiables : linéarité, composition par une application bilinéaire, multilinéaire, composition, règle de la chaîne, dérivée le long d'un arc. Si E est muni d'un produit scalaire, gradient.

1.2 Applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition, lien avec les dérivées partielles. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$. Lien avec l'intégration : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans U, si $\gamma(0) = a$ et si $\gamma(1) = b$, alors $f(b) - f(a) = \int_0^1 df((\gamma(t))(\gamma'(t))dt$. Si U est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur U. Vecteurs tangents à une partie. Exemples : sous-espaces affine, sphère dans le cas euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si g est une application numérique de classe $\mathcal{C}^1$, si $X = g^{-1}(\{0\})$, si $x \in X$ vérifie $dg(x) \neq 0$, alors T_xX est le noyau de $dg(x)$ (admis : le théorème des fonctions implicites n'est pas au programme).

1.3 Applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition, opérations, théorème de Schwarz, exemple de résolution d'équations aux dérivées partielles.

1.4 Optimisation

Etude au premier ordre : pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, ses extrema locaux se trouvent parmi les points critiques. Optimisation sous contrainte : soit g est une application numérique de classe $\mathcal{C}^1$, soit $X = g^{-1}(\{0\})$, soit $x \in X$ vérifiant $dg(x) \neq 0$, alors si $f_{|X}$ possède un extremum local en x, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(x) = \lambda dg(x)$. Etude au deuxième ordre : hessienne, formule de Taylor-Young à l'ordre 2, application à l'étude des extrema locaux. Condition nécessaire: hessienne symétrique positive pour un minimum local, condition suffisante : hessienne définie positive pour un minimum local strict. Cas particulier $n = 2$, étude des signes du déterminant et de la trace, notations de Monge.

2 Exercices de la banque CCINP.

33-41-52-56-57-58.

Prochaine semaine : révisions sur la réduction.