Programme de colles

MP2

du 31 janvier au 4 février 2022.

1 Familles sommables.

1.1 Ensembles dénombrables.

Définition, $\mathbb{Z}$ est dénombrable, toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable, $\mathbb{Q}$ est dénombrable, le produit cartésien d'une famille finie non vide d'ensembles dénombrables est dénombrable, la réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables et au plus dénombrable. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

1.2 Familles sommables de réels positifs.

Définition, pour une série de réels positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et si $\sum u_n$ converge, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, comparaison. Permutation de l'ordre de sommation, addition de deux familles sommables et multiplication par un scalaire d'une famille sommable. Sommation par paquets.

1.3 Familles sommables de nombres complexes.

Définition, pour une série de complexes $\sum u_n$: $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et si $\sum u_n$ converge absolument, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, inégalité triangulaire, permutation de l'ordre de sommation, linéarité de la somme, sommation par paquets.

1.4 Applications.

Séries doubles : réécriture des théorèmes de sommation par paquets. Produit de Cauchy : exemple de l'exponentielle.

2 Séries entières.

2.1 Rayon de convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence ; détermination du rayon, comparaison, $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence ; rayon et opérations sur les séries (addition, multiplication par un scalaire et produit de Cauchy).

Prochaine semaine : fin des séries entières.