Programme de colles

MP2

du 3 au 7 février 2020.

1 Familles sommables.

1.1 Ensembles dénombrables.

Définition, $\mathbb{Z}$ est dénombrable, toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable, $\mathbb{Q}$ est dénombrable, le produit cartésien d'une famille finie non vide d'ensembles dénombrables est dénombrable, la réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables et au plus dénombrable. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

1.2 Familles sommables de réels positifs.

Définition, pour une série de réels positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et si $\sum u_n$ converge, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, comparaison. Permutation de l'ordre de sommation, addition de deux familles sommables et multiplication par un scalaire d'une famille sommable. Sommation par paquets.

1.3 Familles sommables de nombres complexes.

Définition, pour une série de complexes $\sum u_n$: $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et si $\sum u_n$ converge absolument, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, inégalité triangulaire, permutation de l'ordre de sommation, linéarité de la somme, sommation par paquets.

1.4 Applications.

Séries doubles : réécriture des théorèmes de sommation par paquets. Produit de Cauchy : exemple de l'exponentielle.

2 Probabilités.

2.1 Espaces probabilisés.

Tribus, univers, événements, espace probabilisable, événements incompatibles, système complet d'événements. Probabilités, espace probabilisé, événement négligeable, presque sûr, soit Ω un ensemble au plus dénombrable, si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$, alors $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille sommable de somme 1, réciproquement, si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille sommable de réels positifs de somme 1, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ et pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega\in A} p_\omega$. Théorème de continuité monotone sous-additivité.

2.2 Probabilités conditionnelles et indépendance.

Définitions, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Indépendance : deux à deux, mutuelle, passage à l'événement contraire.

Prochaine semaine : fonctions convexes.