MP2 : programme de colles du 17 au 21 janvier 2022.

1 Anneaux

1.1 Anneaux

Anneaux, anneau produit, si A n'est pas réduit à $\{0\}$, groupe des unités. Sous-anneaux. Morphismes d'anneaux : image directe et réciproque d'un sous-anneau, image d'un morphisme d'anneaux. Anneaux intégres. Corps, sous-corps.

1.2 Idéaux d'un anneau commutatif.

Idéal, le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal, intersection d'idéaux, somme de deux idéaux. Idéaux de $\mathbb{Z}$. Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre. Idéaux de $\mathrm{K}[X]$.

1.3 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\times)$ est un anneau commutatif, éléments inversibles, c'est un corps si et seulement si n est premier. Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, utilisation de la décomposition en facteurs premiers de n pour calculer $\varphi(n)$, théorème d'Euler.

1.4 Anneaux des polynômes à une indéterminée.

Générateur unitaire d'un idéal non trivial de $\mathrm{K}[X]$, PGCD de deux polynômes non nuls, théorème de Bézout, lemme de Gauss. Polynômes irréductibles, décomposition en produit de facteurs irréductibles.

1.5 Algèbre.

Algèbres, sous-algèbres, morphismes d'algèbres : image et noyau.

2 Compacité et espaces vectoriels de dimension finie.

2.1 Compact.

Les compacts sont fermés et bornés, produit fini de compacts. L'image continue d'un compact est compacte, cas des fonctions à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes. Uniforme continuité, théorème de Heine.

2.2 Connexité par arcs.

Toute partie étoilée est connexe par arcs, les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs, dans le cas où la fonction est à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

2.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie.

Equivalence des normes. Caractérisation de la convergence d'une suite par la convergence de ses suites coordonnées, caractérisation de la convergence d'une application par la convergence de ses applications coordonnées. Théorème de Bolzano-Weierstrass, les compacts sont les parties fermées et bornées. Une suite bornée d'un espaces vectoriel normé de dimension finie converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé. Les applications linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues. Toute application polynomiale est continue, toute application multilinéaire sur un produit d'espaces vectoriels de dimension finie est continue.

3 Exercices de la banque CCINP.

38-40-61-66-85-86-87-90-94

Prochaine semaine : réduction, suite et fin.