Programme de colles
MPI
du 22 au 26 janvier 2024.

1 Espaces préhilbertiens réels : révisions de sup.

1.1 Produit scalaire, norme associée.

Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaires. Formules de polarisation.

1.2 Orthogonalité.

Théorème de Pythagore, orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1.3 Base orthonormée.

Existence de bases orthonormées. Théorème de la b.o.n. incomplète. Calculs dans une b.o.n.

1.4 Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.

2 Endomorphismes d'un espace euclidien.

2.1 Adjoint d'un endomorphisme.

Définition, propriétés : représentation matricielle dans une b.o.n. Le passage à l'adjoint est involutif, adjoint d'une composée. Polynôme caractéristique de l'adjoint, spectre, trace, déterminant, image et noyau, en fonction de ceux de l'endomorphisme de départ. Si F est un sous-espace stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

2.2 Matrices orthogonales.

Définition, les colonnes forment une b.o.n. Groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$, déterminant et groupe orthogonal, le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Le déterminant dans une b.o.n.d. ne dépend pas du choix de cette b.o.n.d.

2.3 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

Définition, caractérisation par la symétrie de la matrice représentative dans une base orthonormée. Théorème spectral pour les endomorphismes symétriques et version matricielle.

2.4 Isométries vectorielles d'un espace euclidien.

Définition, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par le fait que l'image d'une base orthonormée soit une base orthonormée. Si f est un automorphisme orthogonal, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale par blocs, avec des blocs de taille 1 contenant 1 ou -1 et des blocs de taille 2 qui sont des matrices de rotation plane avec une mesure de l'angle dans $]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$. Cas particulier de la dimension 3 et d'une isométrie vectorielle directe.

3 Exercices de la banque CCINP.

63-66-68-78.

Prochaine semaine : séries entières.