

Programme de colles

MPI

du 13 au 17 janvier 2025.

1 Groupes

Intersection de sous-groupes, sous-groupes engendrés par une partie, sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Les groupes monogènes sont soit infinis et alors ils sont isomorphes à $(\mathbb{Z}, +)$, soit finis et donc cycliques, si le cardinal est n , le groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Ordre d'un élément dans un groupe. Lien avec le cardinal du sous-groupe engendré par l'élément. Si G est un groupe fini et si x est un élément de G d'ordre fini, l'ordre de cet élément divise le cardinal du groupe (la démonstration est au programme dans le cas où G est commutatif, sinon, elle n'est pas exigible ; le théorème de Lagrange est hors-programme, mais il a été vu...).

2 Anneaux

Anneaux, anneau produit, idéal d'un anneau commutatif, le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal, intersection d'idéaux, somme de deux idéaux. Idéaux de \mathbb{Z} .

Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre.

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, éléments inversibles, c'est un corps si et seulement si n est premier. Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, utilisation de la décomposition en facteurs premiers de n pour calculer $\varphi(n)$, théorème d'Euler.

Anneaux des polynômes à une indéterminée. Idéaux de $K[X]$. Générateur unitaire d'un idéal non trivial de $K[X]$, PGCD de $n \geq 2$ polynômes non nuls, théorème de Bézout, lemme de Gauss. Polynômes irréductibles, décomposition en produit de facteurs irréductibles.

3 Algèbre.

Algèbres, sous-algèbres, morphismes d'algèbres : image et noyau.

4 Exercices de la banque CCINP.

Pas d'exercice cette semaine.

Prochaine semaine : endomorphismes d'un espace euclidien.