

Programme de colles

MPI

du 9 au 13 janvier 2023.

1 Réduction : révisions.

Sous-espaces stables, valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Polynôme caractéristique. Diagonalisation, trigonalisation.

2 Réduction : utilisation de polynômes annulateurs.

2.1 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Définitions, morphismes d'algèbre $P \mapsto P(u)$ et $P \mapsto P(A)$.

Idéal des polynômes annulateurs d'un endomorphisme. En dimension finie : polynôme minimal. La dimension de $K[u]$ est le degré du polynôme minimal de u . Le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. Le spectre de u est exactement l'ensemble des racines du polynôme minimal de u . Traduction matricielle.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Exemples d'utilisation de polynômes annulateurs. Calcul des puissances d'une matrice : on effectue la division euclidienne de X^k par P , avec P annulateur de A . Si $P(0) \neq 0$, A est inversible et calcul de A^{-1} .

2.2 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité.

Lemme des noyaux. Critère de diagonalisabilité pour un endomorphisme en dimension finie ou pour une matrice : existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples ou le polynôme minimal est scindé à racines simples.

2.3 Polynômes annulateurs et trigonalisabilité.

Endomorphismes nilpotents : le spectre est réduit à $\{0\}$. Caractérisation en dimension finie par le polynôme caractéristique vaut X^n ou l'existence d'une base dans laquelle la matrice représentative est triangulaire stricte. Traduction matricielle.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. Si u possède un polynôme annulateur scindé, alors E se décompose en la somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Traduction matricielle.

Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé. Ils sont supplémentaires dans E . Version matricielle.

3 Exercices de la banque CCINP.

62-65-88-91-93

Prochaine semaine : endomorphismes d'un espace euclidien.