Programme de colles

MP2

du 7 au 11 décembre 2020.

1 Intégration sur un intervalle quelconque.

1.1 Intégration sur $[a, +\infty[$.

Définition d'une intégrale convergente. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Linéarité de l'intégrale, relation de Chasles, positivité, cas des fonctions continues : une fonction continue, positive et d'intégrale nulle est nulle, si f est continue sur $[a, +\infty[$ d'intégrale convergente sur $[a, +\infty[$, alors $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, et sa dérivée est $-f$. Théorèmes de comparaison pour des fonctions à valeurs positives. Intégrabilité : si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ converge et $\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|dt$, linéarité, comparaison.

1.2 Généralisation à un intervalle quelconque.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Mêmes propriétés que précédemment.
Calcul d'intégrales : changement de variable et intégration par parties.
Intégration des relations de comparaison.

2 Exercices de la banque CCINP.

5-28-56.

Prochaine semaine : topologie et continuité.