

Programme de colles

MPI

du 5 au 9 décembre 2022.

1 Intégration sur un intervalle quelconque.

1.1 Intégration sur $[a, +\infty[$.

Définition d'une intégrale convergente. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$; $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 0$. Linéarité de l'intégrale, relation de Chasles, positivité, cas des fonctions continues : une fonction continue, positive et d'intégrale nulle est nulle, si f est continue sur $[a, +\infty[$ d'intégrale convergente sur $[a, +\infty[$, alors $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$, et sa dérivée est $-f$. Théorèmes de comparaison pour des fonctions à valeurs positives. Intégrabilité : si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ converge et $\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$, linéarité, comparaison.

1.2 Généralisation à un intervalle quelconque.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Mêmes propriétés que précédemment. Calcul d'intégrales : changement de variable et intégration par parties. Intégration des relations de comparaison.

2 Intégration et suites ou séries de fonctions.

Théorème de convergence dominée, extension à un paramètre réel. Théorème d'intégration terme à terme : dans le cas où les fonctions sont à valeurs positives et intégrables, on peut intervertir et si on obtient une quantité finie, la somme de la série est intégrable (c'est nouveau !) Sans hypothèse de signe, on revient à la vérification de la convergence de la série des $\int_I |f_n|$. (Les démonstrations ne sont pas au programme).

3 Intégrales à paramètre.

Théorème de continuité, théorème de régularité \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

4 Exercices de la banque CCINP.

5-19-25-26-28.

Prochaine semaine : le même programme.