CENTRALE

Exercice 1

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}dt \qquad g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{t^2}dt.$$

1. (a) Enoncer les théorèmes de régularité d'une intégrale à paramètre.
   (b) Justifier que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour $x>0$, justifier que $g(x)=xg(1)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer pour $x>0$, $f''(x)-4f(x)$ en fonction de $g(1)$. En déduire f.
3. En déduire la valeur de $g(1)$.

Solution 1

1. (a) Cours
   (b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Les fonctions $t\mapsto\frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}$ et $t\mapsto\frac{\sin^2(tx)}{t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Elles sont dominées au voisinage de $+\infty$ par $t\mapsto\frac{1}{t^4}$ et $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ respectivement, intégrables sur $[1,+\infty[$. Elles sont équivalentes, au voisinage de 0, à $t\mapsto x$, intégrable sur $]0,1]$. Ainsi, les deux intégrandes sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison et $f(x)$ et $g(x)$ sont bien définies.
   Pour $x>0$, on effectue le changement de variable $y=xt$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient bien $g(x)=xg(1)$.

2. Pour $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto\frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées premières et secondes sont $x\mapsto\frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}$ et $x\mapsto\frac{2\cos(2tx)}{(1+t^2)}$ respectivement.
   Pour $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}$ et $t\mapsto\frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour la première, ça a été vu dans la question précédente, pour la deuxième, c'est semblable, avec une domination en $t\mapsto\frac{1}{t^3}$ en $+\infty$ et un équivalent en $t\mapsto 2x$ en 0).
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$,
   $$\left|\frac{2\cos(2tx)}{(1+t^2)}\right|\leq\frac{2}{1+t^2}$$
   et $t\mapsto\frac{2}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On peut donc utiliser le théorème de régularité d'une intégrale à paramètre version $\mathcal{C}^2$: f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in\mathbb{R}$,
   $$f''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2\cos(2tx)}{(1+t^2)}dt.$$
   Pour $x>0$, on obtient
   $$f''(x)-4f(x)=2\int_0^{+\infty}\frac{t^2\cos(2tx)-2\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{t^2(1-\sin^2(tx))-2\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}dt$$
   ou encore
   $$f''(x)-4f(x)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt-4g(x)=\pi-4xg(1).$$

On résout cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ en remarquant que $x \mapsto -\frac{\pi}{4}+xg(1)$ est une solution particulière. Il existe donc A et B dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + xg(1) - \frac{\pi}{4}.$$

Mais f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = f'(0) = 0$. En regardant les limites lorsque x tend vers 0^+, on trouve donc $A = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}g(1)$ et $B = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}g(1)$ et finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\mathrm{ch}(2x) - \frac{1}{2}g(1)\mathrm{sh}(2x) + xg(1) - \frac{\pi}{4}.$$

Comme f est paire, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\mathrm{ch}(2x) - \frac{1}{2}g(1)\mathrm{sh}(2|x|) + |x|g(1) - \frac{\pi}{4}.$$

3. L'étude du comportement de f en $+\infty$ va nous permettre de trouver la valeur de $g(1)$.
On réécrit $f(x)$ pour $x > 0$:

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{g(1)}{2}\right)e^{2x} + g(1)x - \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{g(1)}{2}\right)e^{-2x}.$$

Mais si on effectue le changement de variable $y = tx$ dans la version initiale de l'expression de $f(x)$, on obtient

$$f(x) = x^3\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2(x^2+y^2)}dy.$$

On peut majorer cette dernière intégrale par

$$|f(x)| \leq x^3\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+y^2}dy$$

qui se calcule :

$$|f(x)| \leq x^3\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}.$$

Donc f est dominée au voisinage de $+\infty$ par $x \mapsto x^2$.
(On aurait pu le voir plus rapidement en dominant $\sin(tx)$ par tx sous l'intégrale...)
Le développement obtenu au début de cette question impose donc que $\frac{\pi}{4} - \frac{g(1)}{2} = 0$. On trouve ainsi $g(1) = \frac{\pi}{2}$, i.e.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2
Soit f convexe sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler et prouver l'inégalité des pentes.
2. Soit $x \in I$. On pose $\Delta_x : y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
   (a) Montrer que Δ_x possède une limite à droite et à gauche en x.
   (b) Montrer qu'il existe $(a_i)_{i\in J}$ une famille de fonctions affines telles que $f = \sup\limits_{i\in J} a_i$.

3. Oubliée... Soit φ une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans I. Montrer que
$$f\left(\int_0^1 \varphi(x)dx\right) \leq \int_0^1 f\circ\varphi(x)dx.$$

Solution 2

1. Cours
2. (a) Par la question précédente, Δ_x est croissante.
   Elle est majorée sur $I\cap]-\infty,x[$ par $\Delta_x(z)$ avec z fixé dans $I\cap]x,+\infty[$. Donc Δ_x possède une limite à gauche en x. On la note ℓ_-.
   De même, Δ_x est minorée sur $I\cap]x,+\infty[$ par $\Delta_x(t)$ avec t fixé dans $I\cap]-\infty,x[$. Donc Δ_x possède une limite à droite en x. On la note ℓ_+.

   (b) Soit $z\in I\cap]x,+\infty[$. Par croissance de Δ_x, pour tout $y\in I\cap]-\infty,x[$, $\Delta_x(y)\leq\Delta_x(z)$ et donc, en passant à la limite (justifiée à la question précédente), $\ell_-\leq\Delta_x(z)$.
   Ceci étant vrai pour tout $z\in I\cap]x,+\infty[$, on peut à nouveau passer à la limite lorsque z tend vers x et
   $$\ell_-\leq\ell_+.$$
   On choisit $a\in[\ell_-,\ell_+]$. Alors, toujours par croissance de Δ_x,
   $$\forall y\in I\cap]-\infty,x[,\quad \Delta_x(y)\leq\ell_-\leq a \qquad \text{et} \qquad \forall y\in I\cap]x,+\infty[,\quad a\leq\ell_+\leq\Delta_x(y).$$
   Finalement, on a bien pour tout $y\in I$
   $$f(y)\geq a(y-x)+f(x).$$
   On pose donc, $\varphi:\, y\mapsto ay+b$, avec $b=-ax+f(x)$. φ est bien une fonction affine et pour tout $y\in I$,
   $$f(y)\geq\varphi(y).$$
   On peut ainsi construire une famille de fonctions affines $(a_x)_{x\in I}$ telles que pour tout $y\in I$ et pour tout $x\in I$
   $$f(y)\geq a_x(y).$$
   A y fixé, on a bien une famille $(a_x(y))_{x\in I}$ bornée : donc elle possède une borne supérieure et
   $$f(y)\geq\sup_{x\in I}a_x(y).$$
   Il reste à voir qu'il y a égalité. Mais pour chaque $y\in I$, $f(y)=a_y(y)$, donc l'égalité est vraie.

3. Montrons dans un premier temps que les deux membres de l'inégalité ont un sens.
   Pour celui de gauche, il suffit de montrer que $\int_0^1\varphi(x)dx\in I$. On écrit $I=]a,b[$ avec $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $a<b$. Pour tout $x\in[0,1]$
   $$a<\varphi(x)<b$$
   et par croissance de l'intégrale
   $$a\leq\int_0^1\varphi(x)dx\leq b.$$
   Mais φ étant continue, si on avait $\int_0^1\varphi(x)dx=b=\int_0^1 b\,dx$ par exemple, alors pour tout $x\in[0,1]$, $\varphi(x)=b$, ce qui n'est pas.

Pour celui de droite, f étant convexe sur un intervalle ouvert, elle y est continue (existence d'une dérivée à droite et à gauche en tout point). La composée $f \circ \varphi$ est donc continue sur $[0,1]$ et finalement $\int_0^1 f \circ \varphi(x)dx$ est bien définie.
Supposons dans un premier temps que f soit affine, de la forme $t \mapsto \alpha t + \beta$. Alors,

$$\alpha \left(\int_0^1 \varphi(x)dx \right) + \beta = \int_0^1 (\alpha\varphi(x) + \beta)dx$$

et donc l'inégalité voulue est vraie.
On utilise alors la question précédente pour conclure : soit $(a_i)_{i\in J}$ une famille de fonctions affines telles que $f = \sup\limits_{i\in J} a_i$. Pour tout $i \in J$

$$a_i \left(\int_0^1 \varphi(x)dx \right) \leq \int_0^1 a_i \circ \varphi(x)dx.$$

Or chaque a_i est inférieure à f, donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 a_i \circ \varphi(x)dx \leq \int_0^1 f \circ \varphi(x)dx.$$

Alors, pour tout $i \in J$

$$a_i \left(\int_0^1 \varphi(x)dx \right) \leq \int_0^1 f \circ \varphi(x)dx.$$

On peut passer à la borne supérieure en $i \in J$ et on obtient l'inégalité voulue.

Exercice 3

1. (a) Rappeler la définition de l'intégrabilité d'une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   (b) Donner Δ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $u_z : t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose $G : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.

2. Soit $z \in \Delta$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de $I_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$.
   (b) Montrer que $I_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G(z)$.
3. Oubliée...Montrer que pour tout $z \in \Delta$

$$\frac{1}{G(z)} = ze^{\gamma z} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right).$$

Solution 3

1. (a) Cours
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord, u_z est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|u_z(t)| = t^{a-1}e^{-t}$.
   u_z est, par croissances comparées, négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc elle est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   $|u_z|$ est équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^{1-a}}$ en 0, donc u_z est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $a > 0$.
   Finalement, u_z est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $a > 0$. En conclusion,

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}.$$

2. (a) $v_{n,z} : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}$ est continue sur $]0,n]$.
Elle est équivalente en 0 à $t \mapsto \frac{1}{t^{1-a}}$ (avec les mêmes notations que précédemment). Donc, elle est intégrable sur $]0,n]$ puisque $a>0$ ($z \in \Delta$). Ainsi, $I_n(z)$ est bien définie.

   (b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathbb{1}_{[0,n]}$.
f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
$I_n(z) = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$. On va donc appliquer le théorème de convergence dominée.
• Chaque f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
• (f_n) converge simplement vers u_z sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, à $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, à partir d'un certain rang, $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}$ et
$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}.$$
• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,
ou bien $n \le t$ et $f_n(t) = 0$,
ou bien $t < n$ et $f_n(t) = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{z-1}$. Par concavité du logarithme népérien
$$|f_n(t)| \le |u_z(t)|.$$
Cette inégalité est donc vraie dans tous les cas.
Or $t \mapsto |u_z(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $y = \frac{t}{n}$ dans $I_n(z)$. On obtient
$$I_n(z) = n^z \int_0^1 (1-y)^n y^{z-1} dy.$$
Par intégrations par parties successives dans cette dernière intégrale, on obtient
$$I_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$
Alors
$$\frac{1}{I_n(z)} = ze^{-z\ln(n)} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{z}{k}\right).$$
On utilise le développement asymptotique usuel
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \qquad [n \to +\infty]$$
$$\frac{1}{I_n(z)} = ze^{-z\left(\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + o(1)\right)} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{z}{k}\right) = ze^{\gamma z + o(1)} \prod_{k=1}^n \left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right).$$
On peut ainsi conclure.

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit a un vecteur unitaire. Notons $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Posons s la symétrie orthogonale par rapport à H et p_H la projection orthogonale sur H.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F et $F^\perp$ sont en somme directe puis montrer que
$$\forall x \in E,\ p_H(x) = x - \langle x|a\rangle\ a.$$

Posons
$$\Omega = \{x \in E \mid \langle x|a\rangle \geq\ 0 \text{ et } \langle x|s(x)\rangle \leq 0\}\,.$$

2. Soit $x \in E$. Montrer l'équivalence suivante :
$$x \in \Omega \iff \langle x|a\rangle\ \geq\ ||p_H\,(x)\,||.$$

3. Soit $x \in E$. Montrer l'équivalence suivante :
$$x \in \Omega \iff \forall y \in \Omega,\ \langle x|y\rangle\ \geq 0.$$

Solution 4

1. Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $\langle x|x\rangle = 0$, donc $\|x\|^2 = 0$, ainsi $x = 0$: F et $F^\perp$ sont en somme directe. Vérifions que $y = x - \langle x|a\rangle a \in H$. On aura alors $x = y + \langle x|a\rangle a$ avec $y \in H$ et $\langle x|a\rangle a \in \mathrm{Vect}(a)$, on pourra conclure. Or
$$\langle y|a\rangle = \langle x|a\rangle - \langle x|a\rangle\langle a|a\rangle = 0.$$
On a bien ce qu'on veut puisque a est de norme 1.

2. Soit $x \in E$. Posons $u = p_H(x)$.
$$x = u + \langle x|a\rangle a \qquad \text{et} \qquad s(x) = u - \langle x|a\rangle a.$$
Donc
$$\langle x|s(x)\rangle = \|u\|^2 - \langle x|a\rangle^2.$$
On a bien,
$$x \in \Omega \quad\iff\quad \|u\| \leq \langle x|a\rangle.$$

3. Prenons $x \in \Omega$. Soit $y \in \Omega$. Montrons que $\langle x|y\rangle \geq 0$.
On écrit $x = \langle x|a\rangle a + p_H(x)$ et $y = \langle y|a\rangle a + p_H(y)$. Il vient
$$\langle x|y\rangle = \langle x|a\rangle\langle y|a\rangle + 0 + 0 + \langle p_H(x)|p_H(y)\rangle.$$
Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$|\langle p_H(x)|p_H(y)\rangle\| \leq \|p_H(x)\|\ \|p_H(y)\| \leq \langle x|a\rangle\langle y|a\rangle$$
par la question précédente. $\langle x|y\rangle$ est bien du signe de $\langle x|a\rangle\langle y|a\rangle$ et donc est positif.
Réciproquement, soit $x \in E$ tel que pour tout $y \in \Omega$, $\langle x|y\rangle \geq 0$. Montrons que $x \in \Omega$.
Tout d'abord $a \in \Omega$ (facile), donc $\langle x|a\rangle \geq 0$.
On écrit $x = x_1 a + y$, avec $y \in H$. On vient de voir que $\langle x|a\rangle \geq 0$, donc $x_1 \geq 0$.
De plus, $s(x) = -x_1 a + y$. Alors $\langle x|s(x)\rangle = -x_1^2 + \|y\|^2$. On cherche donc à montrer que $\|y\|^2 \leq x_1^2$, ou $\|y\| \leq x_1$.
On pose $z = \lambda a + t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in H$. On cherche à savoir à quelle condition $z \in \Omega$. Comme précédemment, on trouve
$$z \in \Omega \quad\iff\quad \lambda \geq 0 \quad \text{et} \quad \|t\|^2 \leq \lambda^2.$$
On choisit z sous cette forme en supposant $z \in \Omega$. On a donc $\langle x|y\rangle \geq 0$, i.e. $-\lambda x_1 \leq \langle y|t\rangle$, ou encore, avec $\lambda > 0$,
$$x_1 \geq \langle y|\frac{-1}{\lambda}t\rangle.$$
On peut donc écrire que pour tout $u \in H$, avec $\|u\| \leq 1$,
$$x_1 \geq \langle y|u\rangle.$$
On choisit alors $u = \frac{1}{\|y\|}y$ pour conclure.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue. On pose

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iky}dy$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x).$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{ilx}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{ikx} = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x-y)f(y)dy.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(y)dy = 1.$$

3. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.

Solution 5

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{l=-n}^{n}\sum_{k=|l|}^{n-1} e^{ilx} = \frac{1}{n}\sum_{l=-n}^{n}(n-1-|l|+1)e^{ilx} = \sum_{l=-n}^{n}\left(1-\frac{|l|}{n}\right)e^{ilx}.$$

   Ensuite,

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx}\sum_{l=0}^{2k} e^{ilx} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx}\frac{1-e^{i(2k+1)x}}{1-e^{ix}} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1-e^{ix}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)x}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1-e^{ix}}\left(\frac{1-e^{-inx}}{1-e^{-ix}} - \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}e^{ix}\right) \\
&= \frac{2}{n}\frac{e^{ix}}{(1-e^{ix})^2}(\cos(nx)-1) \\
&= \frac{-4}{n}\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{(-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-ily}dy e^{ilx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{il(x-y)}dy$$

d'où

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)K_n(x-y)dy.$$

2.
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(y)dy = \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k}\int_0^{2\pi} e^{ily}dy.$$

Or $\int_0^{2\pi} e^{ily}dy = 0$ si $l \neq 0$. Il reste donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(y)dy = \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi = 1.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
f_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)K_n(x-y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-u)K_n(u)du - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)K_n(u)du - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(x-u) - f(x)\right)K_n(u)du
\end{aligned}$$

par 2π-périodicité de $u \mapsto f(x-u)K_n(u)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
f étant continue et 2π-périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (Heine). Il existe donc $\eta > 0$ (que l'on peut supposer dans $]0, \frac{\pi}{2}[$) tel que pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^2$,

$$|y-z| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

On utilise alors l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles, sachant que K_n est à valeurs positives (par 1. sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et par continuité sur $2\pi\mathbb{Z}$)

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta} K_n(u)|f(x-u) - f(x)|du + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{2\pi-\eta} K_n(u)|f(x-u) - f(x)|du +$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\eta}^{2\pi} K_n(u)|f(x-u) - f(x)|du.$$

f est bornée sur $\mathbb{R}$ puisque continue et périodique. On note $M = \|f\|_\infty$.

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta} K_n(u)\varepsilon du + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{2\pi-\eta} K_n(u)2M du + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\eta}^{2\pi} K_n(u)|f(x-u+2\pi) - f(x)|du.$$

Donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\eta} K_n(u)du + \frac{2M}{2\pi}\int_{\eta}^{2\pi-\eta} \frac{1}{n\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}du + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\eta}^{2\pi} K_n(u)\varepsilon du.$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(u)du + \frac{M}{n\pi}\int_\eta^{2\pi-\eta} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}du.$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{M}{n\pi}\int_\eta^{2\pi-\eta} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}du$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{2M}{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}.$$

Le membre de droite ne dépend pas de x :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}.$$

Le deuxième terme du majorant converge vers 0 : il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x}$.

1. (a) Rappeler les théorèmes d'intégration des relations de comparaison.
   (b) Donner un équivalent de $\ln \circ f$ en $+\infty$.
2. (a) On pose $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$. Quel est le domaine de définition de u ?
   (b) Etudier les limites au bord du domaine.
3. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$u(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{c}{x} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solution 6

1. (a) Cours
   (b) Le théorème d'intégration des relations de comparaison, dans le cas divergent, donne

$$\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{a}{t}dt$$

puisque $\int_1^{+\infty} \frac{a}{t}dt$ diverge et $t \mapsto \frac{a}{t}$ est positive sur $[1, +\infty[$.
On a donc

$$\ln(f(x)) - \ln(f(1)) \underset{x\to+\infty}{\sim} a\ln(x).$$

Comme $\ln(x)$ diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln(f(x))$ diverge aussi vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et donc $\ln(f(x)) - \ln(f(1)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(f(x))$. Finalement,

$$\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} a\ln(x).$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
On suppose que $x > 0$. Alors
$$n^2 u_n(x) = e^{\ln(f(n)) - nx + 2\ln(n)}.$$
Or on vient de voir que
$$\ln(f(n)) = a\ln(n) + o(\ln(n)) \quad [n \to +\infty]$$
donc
$$\ln(f(n)) - nx + 2\ln(n) = -nx + (a+2)\ln(n) + o(\ln(n)) \quad [n \to +\infty].$$
Il s'en suit que $\ln(f(n)) - nx + 2\ln(n)$ diverge vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et ainsi $n^2 u_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On peut donc conclure que $\sum u_n(x)$ converge, par comparaison aux séries de Riemann.
Supposons maintenant que $x \leq 0$. Alors $u_n(x) \geq f(n)$, mais $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par la question précédente. $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
Finalement, u est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) <u>Etude en $+\infty$.</u>
On cherche à appliquer le théorème d'interversion limite-somme.
• $u_0(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ et pour $n \geq 1$, $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [1, +\infty[$, $|u_n(x)| \leq f(n)e^{-n}$, donc $\|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq f(n)e^{-n}$. $n^2\|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (vu précédemment) et donc $\sum \|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge par comparaison aux séries de Riemann. $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[1, +\infty[$. Le théorème d'interversion somme-intégrale permet de conclure que
$$u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

<u>Etude en 0^+.</u>
$\sum f(n)$ diverge (grossièrement). On va donc montrer que $u(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme $\sum f(n)$ diverge et est à termes positifs, la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$:
$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies \sum_{k=0}^{n} f(k) \geq M + 1.$$
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$$u(x) \geq \sum_{n=0}^{N} f(n)e^{-nx}.$$
Or
$$\sum_{n=0}^{N} f(n)e^{-nx} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{N} f(n) \geq M + 1.$$
Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \eta]$, $u(x) \geq M$.
On a montré
$$u(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. Dans le cas où $f : x \mapsto x^a$, on peut montrer, par comparaison série-intégrale (étudier les variations de $t \mapsto t^a e^{-t}$)
$$u(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{c}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $c = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt$.
Revenons au cas général.
Soit $x > 0$ fixé. Par croissance de exp et de f, ainsi que par leur positivité, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{n-1}^{n} f(t) e^{-(t+1)x}\, dt \leq f(n) e^{-nx} \leq \int_{n}^{n+1} f(t) e^{-(t-1)x}\, dt$$

l'inégalité de droite étant aussi vraie pour $n = 0$. En sommant (notons que les termes sont positifs et que l'on peut travailler dans $[0, +\infty]$)

$$e^{-x} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx}\, dt \leq u(x) - f(0) \leq u(x) \leq e^x \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx}\, dt.$$

Ceci montre au passage que l'intégrale est finie. Comme $e^x \to 1$ quand $x \to 0$, on a

$$u(x) \underset{x \to 0}{\sim} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx}\, dt.$$

Le changement de variable $u = tx$ donne

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(u/x) e^{-u}\, du$$

et ainsi

$$\frac{xu(x)}{f(1/x)} \underset{x \to 0}{\sim} \int_0^{+\infty} \frac{f(u/x)}{f(1/x)} e^{-u}\, du.$$

On cherche à montrer que ce terme admet une limite $c > 0$ et pour cela, on va utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu pour étudier la limite en $+\infty$ de

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{f(uy)}{f(y)} e^{-u}\, du.$$

Commençons par étudier le quotient sous l'intégrale.
On pose $g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. On a donc $g(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{a}{t}$ et $f' = gf$. En résolvant l'équation différentielle, on trouve

$$\forall t \geq 0,\ f(t) = f(0) \exp\left(\int_0^t g \right)$$

On en déduit que

$$\forall u > 0,\ \frac{f(uy)}{f(y)} = \exp\left(\int_y^{uy} g \right)$$

Venons en à notre théorème de convergence dominée.

- Soit $u > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe t_0 tel que $\forall t \geq t_0$, $\frac{a-\varepsilon}{t} \leq g(t) \leq \frac{a+\varepsilon}{t}$ (puisque $tg(t) \to a$). Supposons par exemple que $u \geq 1$. Il existe y_0 tel que

  $$\forall y \geq y_0,\ (a - \varepsilon) \ln(u) = \int_y^{uy} \frac{a - \varepsilon}{t}\, dt \leq \int_y^{uy} g \leq \int_y^{uy} \frac{a + \varepsilon}{t}\, dt = (a + \varepsilon) \ln(u)$$

  et on en déduit que

  $$\lim_{y \to +\infty} \int_y^{uy} g = \ln(u^a).$$

  Il suffit d'échanger l'ordre des inégalités précédentes pour répondre au cas où $u < 1$. On a donc

  $$\forall u > 0,\ \lim_{y \to +\infty} \frac{f(uy)}{f(y)} e^{-u} = u^a e^{-u}$$

- $t \mapsto tg(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite $a > 0$ en $+\infty$. Cette fonction est inférieure à $3a/2$ et supérieure à $a/2$ au voisinage $[t_1, +\infty[$ de $+\infty$ et sur $[0, t_1]$, elle admet un maximum et un minimum strictement positif. Il existe donc b et $c > 0$ tel que $\forall t \geq 0,\ \frac{c}{t} \leq g(t) \leq \frac{b}{t}$. On a alors
$$\forall y > 0,\ \forall u \geq 1,\ \frac{f(uy)}{f(y)} \leq \exp\left(\int_y^{uy} \frac{b}{t}\, dt\right) = u^b$$
et
$$\forall y > 0,\ \forall u < 1,\ \frac{f(uy)}{f(y)} \leq \exp\left(-\int_{uy}^{y} \frac{c}{t}\, dt\right) = u^c.$$
La fonction $\varphi :\ u \mapsto u^b$ pour $u \geq 1$ et u^c pour $u < 1$ est une fonction de domination intégrable.

Le théorème de convergence dominée s'applique et permet de conclure, avec
$$c = \int_0^{+\infty} u^a e^{-u} du.$$
Cette constante c est donc la même quelque soit la fonction f satisfaisant les hypothèses de départ.

Exercice 7

1. (a) Enoncer le théorème de Rolle.
   (b) Soit f vérifiant les hypothèses du théorème de Rolle, avec $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $a < b$ et f définie sur $]a, b[$. Montrer que la conclusion du théorème de Rolle reste vraie si f admet des limites (finies ou infinies) identiques en a et b.

2. On pose $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x^2-1}}$.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in]-1, 1[$
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} f(x).$$
   Quel est le degré de P_n ?

3. Etudier les zéros de $f^{(n)}$.

Solution 7

1. (a) Cours
   (b) On note ℓ cette limite commune.
   Ou bien f est constante et la conclusion est immédiate.
   Sinon, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq \ell$. On pose $\delta = |\ell - f(x_0)| > 0$.
   Par définition d'une limite, il existe $(c, d) \in]a, b[^2$ avec $c < d$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, si $x \leq c$ ou $x \geq d$, alors $|f(x) - \ell| \leq \frac{\delta}{2}$.
   f est continue sur le segment $[c, d]$ donc elle y possède un minimum m et un maximum M.
   f n'est pas constante sur $[c, d]$ puisque $f(x_0) \neq f(c)$. Et comme on a aussi $f(x_0) \neq f(d)$, ou m ou M est atteint dans $]c, d[$. Mettons que ce soit m. On écrit $m = f(x_1)$, avec $x_1 \in]c, d[$.
   Il s'agit d'un minimum local : $f'(x_1) = 0$.

2. (a) Par composition f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

(b) On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ convient.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} f(x).$$

Dérivons à nouveau : pour $x \in]-1,1[$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)(1-x^2)^{2n} - P_n(x)2n(1-x^2)^{2n-1}(-2x)}{(1-x^2)^{4n}} f(x) + \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} \frac{-2x}{(1-x^2)^2} f(x)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)(1-x^2)^2 + (4nx(1-x^2) - 2x)P_n(x)}{(1-x^2)^{2n+2}} f(x).$$

Il suffit donc de poser $P_{n+1} = (1-X^2)^2 P_n' + (4nX(1-X^2) - 2X)P_n$ pour conclure.
On a $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$ et $P_2 = 6X^4 - 2$.
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que P_n est de degré $3n-2$. (Il suffit d'écrire $P_n = \lambda X^d + R$ avec R de degré strictement inférieur à d pour obtenir le résultat.)

3. Le résultat précédent permet de montrer que $f^{(n)}(x) \longrightarrow 0$ lorsque x tend vers -1^+ ou vers 1^-. Avec la généralisation du théorème de Rolle, vue en 1., appliquée à f sur $]-1,1[$, f' s'annule (au moins) une fois sur $]-1,1[$. Notons $c_{1,1}$ le point où f' s'annule.
On peut aussi appliquer cette généralisation à f' sur $]-1,c_{1,1}[$ et sur $]c_{1,1},1[$: f'' s'annule donc au moins deux fois en $c_{2,1}$ et $c_{2,2}$ avec $-1 < c_{2,1} < c_{2,2} < 1$.
On peut alors montrer par récurrence que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]-1,1[$.