CENTRALE

Planche 1
On admet que si u et v sont diagonalisables et commutent alors ils sont codiagonalisables.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $\mathcal{A}$ une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$ telle que tout u dans $\mathcal{A}$ est diagonalisable.
Soit $u \in \mathcal{A}$.

1. Soient $L_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & u \circ v \end{array} \right.$ et $R_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & v \circ u \end{array} \right.$
   Montrer que L_u et R_u sont diagonalisables.
   $\theta_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & u \circ v - v \circ u \end{array} \right.$ est-t-il diagonalisable ?

2. Soit $\varphi_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ v & \mapsto & u \circ v - v \circ u \end{array} \right.$, λ une valeur propre de φ_u et w vecteur propre associé.
   Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi_u(w^k) = k\lambda w^k$. En déduire la valeur de λ.

3. Montrer que $\mathcal{A}$ est commutative et en déduire que sa dimension est majorée par n.

Planche 2
On note $P = X^n - X - 1$ où $n \geq 3$. On note R l'ensemble des racines complexes de P.

1. Montrer que P ne possède que des racines simples. Calculer
$$S(P) = \sum_{z \in R} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

2. On note $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ une racine de P. Montrer que
$$2\text{Re}\left(z - \frac{1}{z} \right) > \frac{1}{r^2} - 1$$

3. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes A, B non constants à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que $P = AB$.

Planche 3
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où les a_i sont des complexes.

1. Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice.

2. Calculer $\det(A)$ et A^2.

3. Donner une CNS sur les a_i pour que A soit diagonalisable.

Planche 4
Soit $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $D : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
   On pose
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$$
2. (a) Montrer que $v = P(D)(u)$.
   (b) Montrer que la convergence de u entraine celle de v.
   (c) On note E l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{C}[X]$ tels que la convergence de $P(D)(u)$ entraine toujours celle de u. Montrer que, pour P et Q unitaires, $PQ \in E$ si et seulement si $P, Q \in E$.
   (d) En déduire que $P \in E$ si et seulement si toute racine de P est en module strictement inférieure à 1.

Planche 5
Soit p un entier premier impair. On note $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $C = \{x^2/\ x \in F_p \setminus \{0\}\}$.

1. (a) Quelle est la structure algébrique de F_p ? De $F_p \setminus \{0\}$?
   (b) Dans le cas $p = 11$, donner C.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg(P) < d$ où $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_d \in [\![1, p-1]\!]$ distincts tels que $\forall i,\ p | P(a_i)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ p | P(n)$.
3. Montrer que C est composé des racines dans F_p de $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ et est de cardinal $\frac{p-1}{2}$.

Planche 6
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.
   (a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$.
   (b) Montrer que $BA = 0$.
2. On suppose que B est nilpotente et que $BA = 0$. Montrer que $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$ est vrai pour tout M.

Planche 7
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de g tel que $V \cap G = \{g\}$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Soient $g_1, g_2 \in G$. Décrire le groupe G_1 engendré par g_1 et celui G_2 engendré par g_1 et g_2.
2. (a) Soit $K \subset \mathbb{C}^*$ un compact. Montrer que $K \cap G$ est fini.
   (b) Montrer que $G \cap \mathbb{U}$ est cyclique.
3. On suppose G non inclus dans $\mathbb{U}$ et on note G^* l'ensemble des éléments de G de module > 1. Montrer que G^* possède un élément g_2 de module minimal.

Planche 8
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

1. Justifier l'existence de $p = \min\{d \in \mathbb{N}/\ M^d = 0\}$. Montrer que $p \leq n$.
2. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et trouver son inverse.
3. Etudier l'inversibilité de $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n$. *Enoncé incomplet.*

Planche 9
On cherche les morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. On se donne un tel morphisme et on note $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(e^{it})$.

1. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\left\| I_n - \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \tilde{\varphi}(t)\, dt \right\| \leq \varepsilon$$
2. Justifier que $\tilde{\varphi}$ est dérivable. Justifier alors qu'il existe une matrice A telle que $\tilde{\varphi}(t) = \exp(tA)$.
3. Conclure.

Planche 10
On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique que l'on note par blocs : $A = \begin{pmatrix} B_p & C_p \\ {}^tC_p & D_p \end{pmatrix}$ où $p \in \{1, \dots, n-1\}$ et $B_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $D_p \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

1. On dit que A est *définie positive* si et seulement si : $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ {}^tX\ AX > 0$ (on identifie $\mathbb{R}^n$ et les matrices unicolonnes).

   Montrer que A est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$.

On suppose désormais que A est définie positive.

2. Montrer que $\det(B_p) > 0$.
3. Montrer que $\det(A) \leq \det(B_p)\det(D_p)$ puis en déduire que $\det(A) \leq a_1 a_2 \cdots a_n$ où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les coefficients diagonaux de A.

Planche 11
On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique que l'on note par blocs : $A = \begin{pmatrix} B_p & C_p \\ {}^tC_p & D_p \end{pmatrix}$ où $p \in \{1, \dots, n-1\}$ et $B_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $D_p \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

1. On dit que A est *définie positive* si et seulement si : $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ {}^tX\ AX > 0$ (on identifie $\mathbb{R}^n$ et les matrices unicolonnes).

   Montrer que A est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$.

On suppose désormais que A est définie positive.

2. Montrer que $\det(B_p) > 0$.
3. Montrer que $\det(A) \leq \det(B_p)\det(D_p)$ puis en déduire que $\det(A) \leq a_1 a_2 \cdots a_n$ où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les coefficients diagonaux de A.

Planche 12
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que

$$A + {}^t\mathrm{Com}(A) = kI_n$$

1. Montrer que $|\mathrm{Sp}(A)| \leq 2$.
   On suppose maintenant que $|\mathrm{Sp}(A)| = 2$ et on note a, b les valeurs propres. Montrer que A est diagonalisable.

2. On note m_1, m_2 les multiplicité de a, b et on suppose $ab \neq 0$. Montrer que $a^{m_1-1}b^{m_2-1} = 1$.

3. On suppose $a = 0$. Montrer que $m_1 = 1$ et $b^{n-2} = 1$.

Planche 13

1. Pour $U \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $J_U = \{AU; A \in M_n(\mathbb{C})\}$. Montrer que J_U est un sous-groupe additif de $M_n(\mathbb{C})$, et que pour P une matrice de projection, J_P et J_{I_n-P} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $M_n(\mathbb{C})$.

2. Soit J un sous-groupe additif de $M_n(\mathbb{C})$ stable par multiplication à gauche (pour tout $A \in J$, pour tout $B \in M_n(\mathbb{C})$, $BA \in J$). Soit $A \in J$, montrer qu'il existe $P \in J$ matrice de projection telle que $\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}(A)$.