CALCUL MATRICIEL

1 Définitions.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On note (E_{ij}) la famille des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, i.e. sa base canonique.

1.1 Opérations élémentaires.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle <u>opération élémentaire</u> sur A toute opération de l'un des trois types suivants :

(i) multiplication d'une ligne (ou d'une colonne) de A par un scalaire non nul,
(ii) permutation de deux lignes (ou de deux colonnes) de A,
(iii) addition à une ligne (respectivement une colonne) de A, du produit par un scalaire d'une autre ligne (respectivement d'une autre colonne) de A.

Les opérations élémentaires précédemment définies vont pouvoir être réalisées grâce aux trois types de matrices suivantes.

1.2 Matrice de dilatation.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on appelle <u>matrice de dilatation</u> la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $D_i(\alpha)$, définie par :

$$D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où le α est dans la i-ème colonne.

1.3 Matrice de permutation.

Pour tout $(i,j) \in \llbracket\, , n\rrbracket^2$, $i \neq j$, on appelle <u>matrice de permutation</u> la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $P_{i,j}$, définie par :

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&& \text{\Large 0} & \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
& \text{\Large 0} &&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

où les deux 1 en dehors de la diagonale sont respectivement en colonne i et j.

1.4 Matrice de transvection.

Pour tout $(i,j) \in \llbracket\, , n\rrbracket^2$, $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on appelle <u>matrice de transvection</u> la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $T_{i,j}(\alpha)$, définie par :

$$T_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&& \text{\Large 0} & \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 1 &&&&&&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& \alpha && \cdots && 1 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
& \text{\Large 0} &&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

où le α est à l'intersection de la j-ème colonne et de la i-ème ligne.

2 Propriétés.

2.1 Propriétés des matrices de dilatation.

Proposition
Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

1. $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$.
2. **Une matrice de dilatation est inversible et $D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.**
3. **Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $D_i(\alpha)A$ est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème ligne de A, L_i, par la ligne αL_i. On note cette opération $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.**
4. **Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $AD_i(\alpha)$ est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A, C_i, par la colonne αC_i. On note cette opération $C_i \longleftarrow \alpha C_i$.**

2.2 Propriétés des matrices de permutation.

Proposition
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

1. $P_{i,j} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$.
2. **Une matrice de permutation est inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{ij}$.**
3. **Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P_{ij}A$ est la matrice obtenue en permutant la i-ème et la j-ème ligne de A. On note cette opération $L_i \longleftrightarrow L_j$.**
4. **Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, AP_{ij} est la matrice obtenue en permutant la i-ème et la j-ème colonne de A. On note cette opération $C_i \longleftrightarrow C_j$.**

2.3 Propriétés des matrices de transvection.

Proposition
Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

1. $T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$.
2. **Une matrice de transvection est inversible et $T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$.**
3. **Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $T_{ij}(\alpha)A$ est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème ligne de A, L_i, par la ligne $L_i + \alpha L_j$. On note cette opération $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.**
4. **Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $AT_{ij}(\alpha)$ est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A, C_j, par la colonne $C_j + \alpha C_i$. On note cette opération $C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_i$.**

3 Algorithme de Gauss-Jordan.

3.1 Matrices équivalentes par lignes ou par colonnes.

Définitions

- Deux matrices A et A' sont dites équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.
- Deux matrices A et A' sont dites équivalentes par colonnes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes. On note alors $A \underset{C}{\sim} A'$.

3.2 Matrices échelonnées.

Définitions

- Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  * Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont.
  * A partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.
- On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.
- Une matrice échelonnée par lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Remarque : on pourrait définir de même la notion de matrice échelonnée par colonnes ou de matrices échelonnée réduite par colonne.

3.3 Algorithme de Gauss-Jordan.

Théorème (Algorithme du pivot de Gauss-Jordan)
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.
Plus précisément, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice E (carrée de taille n) produit de matrices de transvection, de matrices de dilatation et de matrices de permutation, et une unique matrice R (de taille (n, p)) échelonnée réduite par lignes telles que $A = ER$.