CCINP

Exercice 1
L'exercice a pour but de déterminer la nature de $\sum a_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$. Déterminer la nature de $\sum b_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{N}$.
3. Conclure

Solution 1

1. Comme $1 < 3 < 4$ et comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $1 < \sqrt{3} < 2$ et donc $-1 < 2-\sqrt{3} < 1$. La suite $(\pi(2-\sqrt{3})^n)$ converge donc vers 0 et par équivalent usuel, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi(2-\sqrt{3})^n$. Or $\sum(2-\sqrt{3})^n$ converge absolument puisqu'il s'agit d'une série géométrique dont la raison est strictement inférieure à 1 en valeur absolue. Par linéarité et comparaison, $\sum b_n$ converge (absolument).
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Delta_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$. On a
$$\begin{aligned}\Delta_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-1)^k\sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\sqrt{3}^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}((-1)^k+1)\sqrt{3}^k\\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2l}2^{n-2l+1}3^l\end{aligned}$$
Pour tout $l \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$, $n+1-2l > 0$, donc $n+1-2l \geq 1$: chaque terme de la dernière somme est un entier naturel pair : δ_n est bien un entier naturel pair. On l'écrit $2\delta_n$, avec $\delta_n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \sin(\pi(2\delta_n - (2-\sqrt{3})^n)) = \sin(2\pi\delta_n - \pi(2-\sqrt{3})^n) = -b_n.$$
$\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont donc de même nature : elles convergent toutes les deux.

Exercice 2
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A inversible. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = P^{-1}(BA)P$.
En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
2. Soit $t \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $(A-tI_n)B$ et $B(A-tI_n)$ ont le même polynôme caractéristique.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \det((A-tI_n)B - xI_n)$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \det(B(A-tI_n) - xI_n)$. Montrer que f et g sont continues. En déduire que $g(0) = f(0)$.
4. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Solution 2

1. $AB = A(BA)A^{-1}$ et donc $P = A^{-1}$ convient.
   AB et BA sont semblables, donc elles ont le même polynôme caractéristique (le déterminant est un invariant de similitude).

2. Puisque t n'est pas dans le spectre de A, $A - tI_n$ est inversible. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente avec $A - tI_n$ à la place de A pour conclure.

3. En utilisant la formule du déterminant d'une matrice :
$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} m_{\sigma(k),k}$$
   on voit tout de suite que f et g sont des fonctions polynomiales. Elles sont donc bien continues. La question précédente montre qu'elles sont égales sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$, i.e. en un nombre infini de points. Elles sont donc égales partout et en particulier en 0.

4. $f(0) = g(0)$ donne exactement $(-1)^n \chi_{AB}(x) = (-1)^n \chi_{BA}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux en une infinité de points : ils sont égaux.

Exercice 3
$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *On pourra commencer par* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
   (c) En déduire l'expression de F.

2. Donner le domaine de définition de $G : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{Arctan}(x \tan(\theta))}{\tan(\theta)} d\theta$.

3. Trouver un lien entre F et G.

Solution 3

1. (a) On applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dominée au voisinage de $+\infty$ par $t \mapsto \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2}$. Cette dernière étant intégrable au voisinage de $+\infty$, $t \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ l'est aussi. Au voisinage de 0, elle est équivalent à $t \mapsto x$, intégrable sur $]0, 1]$, donc $t \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ l'est aussi. Finalement, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   • Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+x^2t^2}$.
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+x^2t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\left| \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{1+x^2t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$
   Comme $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Par parité (F est clairement impaire, donc F' est paire), il suffit de connaître F' sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \right) dt \\ &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{1-x^2}\frac{\pi}{2} - \frac{x}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(xt)^2} x dt \\ &= \frac{1}{1-x^2}\frac{\pi}{2} - \frac{x}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \frac{1}{1-x^2}\frac{\pi}{2} - \frac{x}{1-x^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{1+x}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Cette expression est valable pour $x = 0$ par continuité de F'.
Pour $x < 0$, par parité de F', on a

$$F'(x) = \frac{1}{1+|x|}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1-x}\frac{\pi}{2}.$$

(c) Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) + c$. Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, $F(x)$ converge vers $F(0) = 0$ lorsque x tend vers 0 et donc $c = 0$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$.
Par parité, on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \mathrm{sgn(x)}\frac{\pi}{2}\ln(1+|\mathrm{x}|).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\theta \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}$ est continue sur $]0, \pi/2[$.
Elle est équivalente en 0 à $\theta \mapsto x$, intégrable sur $]0, \pi/4]$ et dominée par $\theta \mapsto \frac{\pi}{2}$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, fonction intégrable sur $[\pi/4, \pi/2[$. Par comparaison, $\theta \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}$ est intégrable sur $]0, \pi/2[$. Ainsi, G est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Le changement de variable $t = \tan\theta$ donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = F(x).$$

Exercice 4
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

1. Montrer que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres possibles.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ces valeurs propres possibles, deux à deux distinctes et E_{λ_i} les sous-espaces propres associés (éventuellement réduits à $\{0\}$ si λ_i n'est pas valeur propre de u.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(i) F est stable par u,
(ii) $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel de E_{λ_i}.

Solution 4

1. On pose $P = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$. P est simplement scindé et annule u : u est diagonalisable.
   De plus, le spectre de u est contenu dans l'ensemble des racines de P, i.e. les valeurs propres possibles de u sont -1, 0 et 1 : $p = 3$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme de F induit par u. Comme P annule u_F, u_F est aussi diagonalisable et ses valeurs propres possibles sont aussi -1, 0, 1. On peut donc décomposer F en la somme des sous-espaces propres de u_F, quitte encore une fois à ajouter $\{0\}$ si λ_i n'est pas valeur propre. Pour $i = 1, \dots, p$, on note
   $F_i = \ker(u_F - \lambda_i \mathrm{Id}_F)$.
   On a $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i est bien un sous-espace vectoriel de E_{λ_i}.
   Réciproquement, supposons que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel de E_{λ_i}. Soit $x \in F$. On écrit $x = x_1 + \cdots + x_p$, où, pour i allant de 1 à p, $x_i \in F_i$. Alors, $u(x) = u(x_1) + \cdots + u(x_p)$.
   Soit $i \in [\![1, p]\!]$. $u(x_i) = \lambda_i x_i$ puisque $x_i \in F_i \subset E_{\lambda_i}$. Puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda_i x_i \in F_i$. $u(x)$ est donc bien dans la somme des F_i, i.e. dans F. Finalement, F est bien stable par u.

Exercice 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_n$, $A \neq -I_n$ et $A^2 = I_n$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \equiv n$ [2].

2. Montrer que $|\mathrm{tr}(A)| \leq n - 2$.

Solution 5

1. $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est simplement scindé et annule A : A est donc diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$. Notons m la multiplicité de -1. Celle de 1 est donc $n - m$. La trace étant un invariant de similitude, $\mathrm{tr}(A) = m \times (-1) + (n - m) \times 1 = n - 2m$. $\mathrm{tr}(A)$ a bien la même parité que n.

2. En reprenant les notations précédentes, $m \in [\![1, n-1]\!]$. En effet, a priori $m \in [\![0, n]\!]$, mais si $m = 0$, alors seule 1 est valeur propre et comme A est diagonalisable, A est semblable à I_n, donc égale à I_n, ce qui est exclu. De même, si $m = n$, alors seule -1 est valeur propre et A serait égale à $-I_n$.
   Comme $\mathrm{tr}(A) = n - 2m$, $1 \leq m \leq n - 1$ donne $2 - n \leq \mathrm{tr}(A) \leq n - 2$, i.e. $|\mathrm{tr}(A)| \leq n - 2$.

Exercice 6
Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt) - \mathrm{Arctant}(t)}{t} dt$.

1. Donner le domaine D de définition de F.

2. Etudier la continuité puis la dérivabilité de F sur D.

3. Donner une forme explicite pour F.

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Que vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(at) - \mathrm{Arctant}(bt)}{t} dt$?

Solution 6

1. On note $f : (x,t) \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt) - \text{Arctant}(t)}{t}$. f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
On utilise le développement limité de Arctan au voisinage de 0 : $\text{Arctan}(u) = u + O(u^3)$ $[u \to 0]$.
Il vient alors $f(x,t) = x - 1 + O(t^2)$ $[t \to 0]$, ainsi $f(x,t)$ est bornée au voisinage de 0, donc elle est intégrable sur $]0,1]$.
Pour l'étude au voisinage de $+\infty$, on différentie suivant x.
Si $x = 0$, $f(0,t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2t}$ et donc $F(0)$ n'est pas définie.
Sinon, on utilise la formule :
$$\forall u \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \text{sgn}(u)\frac{\pi}{2} \qquad (1).$$
Alors si $x > 0$,
$$f(x,t) = \frac{1}{t}\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{xt}\right)\right).$$
Le développement limité de Arctan au voisinage de 0 donne alors
$$f(x,t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \qquad [t \to +\infty]$$
et donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Si $x < 0$,
$$f(x,t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\frac{\pi}{t}$$
et donc $F(x)$ n'est pas définie.
Finalement, le domaine de définition de F est $D = \mathbb{R}_+^*$.

2. L'inégalité des accroissements finis appliquée à Arctan entre u et v dans $\mathbb{R}_+^*$ donne
$$|\text{Arctan}(u) - \text{Arctan}(v)| \leq |u - v|.$$
On applique le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
• $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in [a,b]$, soit $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$|f(x,t)| \leq \frac{|xt - t|}{t} \leq |x - 1| \leq b + 1.$$
Avec la formule (1) rappelée plus haut, on a aussi
$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{t^2}\left|1 - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{t^2}\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$
On pose donc
$$\varphi_{a,b} : t \mapsto \left|\begin{array}{lll} b+1 & \text{si} & t \in]0,1] \\ \frac{1}{t^2}\left(1 + \frac{1}{a}\right) & \text{si} & t \in [1, +\infty[. \end{array}\right.$$
$\varphi_{a,b}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On peut donc appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre pour conclure que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On applique ensuite le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.
• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
• $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+x^2t^2}.$$

• Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in [a,b]$, soit $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+a^2t^2}.$$

$t \mapsto \frac{1}{1+a^2t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre : F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}dt.$$

3. La dernière intégrale écrite se calcule : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{\pi}{2x}$.
Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x) + K$.
Comme $F(1) = 0$, $K = 0$ et finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x).$$

4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $I(a,b)$ l'intégrale cherchée.
Si $a = b$, $I(a,b) = 0$.
On suppose donc $a \neq b$.
Si $a = 0$ (ou $b = 0$), l'étude faite en 1 montre que $I(a,b)$ n'est pas définie.
On suppose donc de plus $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Si $a > 0$ et $b > 0$, le changement de variable $u = bt$ donne $I(a,b) = F\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$.
Si $a < 0$ et $b < 0$, Arctan étant impaire, on a $I(a,b) = -I(-a,-b)$ et par le cas précédent, $I(a,b) = -\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$.
Si $a > 0$ et $b < 0$, la même étude qu'en 1 montre que l'intégrande est équivalente en $+\infty$ à $t \mapsto \frac{\pi}{t}$ et donc $I(a,b)$ n'est pas définie.
Si $a < 0$ ou $b > 0$, on a de même $I(a,b)$ non définie.

Exercice 7

$$g \ : \ x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t}dt.$$

1. Quel est le domaine de définition de g ? On le note D.

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer g'.

3. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Calculer $g(x)$ pour tout $x \in D$.

Solution 7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Au voisinage de $+\infty$,
$$\frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-(x-1)t}}{t}.$$
Si $x > 1$, $t \mapsto \frac{e^{-(x-1)t}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$.
Si $t \leq 1$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dominée par $t \mapsto \frac{e^{-(x-1)t}}{t}$ et donc les deux ne sont pas intégrables sur $[1, +\infty[$.
Finalement, $t \mapsto \frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t}$ ne l'est pas non plus et comme elle est positive, $g(x)$ n'est pas définie.
On suppose donc à nouveau $x > 1$ et on regarde ce qui se passe au voisinage de 0.
$$\frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1.$$
Comme $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, 1]$, $t \mapsto \frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t}$ l'est aussi et$g(x)$ est bien définie.
Finalement, $D =]1, +\infty[$.

2. On applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.
• $\forall x \in]1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
• $\forall t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto -e^{-xt}\text{sh(t}$.
• $\forall x \in]1, +\infty[$, $t \mapsto -e^{-xt}\text{sh(t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
$$\left|-e^{-xt}\text{sh(t}\right| \leq \frac{e^{-(a-t)}}{2}$$
et $t \mapsto \frac{e^{-(a-t)}}{2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre et affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et que pour $x \in]1, +\infty[$
$$g'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\text{sh}(t)dt.$$
La définition de sh et le calcul d'une primitive dans le cas d'une exponentielle permet d'obtenir
$$g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}.$$

3. On applique la généralisation du théorème de convergence dominée.
• Pour tout $x \geq 2$, $t \mapsto \frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
• La fonction identiquement nulle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $x \geq 2$, pour tout $t > 0$,
$$\left|\frac{e^{-xt}\text{sh}(t)}{t}\right| \leq \frac{e^{-2t}\text{sh}(t)}{t}.$$
On a vu à la première question ($x = 2$) que $t \mapsto \frac{e^{-2t}\text{sh}(t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer que
$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. La question 2 permet d'affirmer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 1$
$$g(x) = -\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(1+x) + K = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + K.$$
La question précédente assure que $K = 0$. Finalement, pour tout $x > 1$,
$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Exercice 8
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec n valeurs propres deux à deux distinctes.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base constituée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v.

2. Soit $\mathcal{E}$ une base de E. On note A la matrice représentative de u dans cette base. Discuter du nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 8

1. Supposons que u et v commutent. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de u. Comme il y en a n, u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour $i = 1 \cdots n$.
Chaque sous-espace propre $\text{Vect}(e_i)$ est stable par v : comme c'est une droite, il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ telle que $v(e_i) = \mu_i e_i$: $\mathcal{B}$ est aussi une base constituée de vecteurs propres pour v.
Réciproquement, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et $v(e_i) = \mu_i e_i$ pour $i = 1 \cdots n$. Alors, pour tout $i = 1 \cdots n$, $(u \circ v)(e_i) = \lambda_i \mu_i e_i = (v \circ u)(e_i)$. Donc u et v commutent.

2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note v l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans $\mathcal{E}$ est X. Alors $X^2 = A$ si et seulement si $v^2 = u$.
$v^2 = u$ si et seulement si $v^2 = u$ et u et v commutent ($v \circ u = v^3 = u \circ v$),
donc si et seulement si $v^2 = u$ et il existe une base commune de diagonalisation.
$v^2 = u$ si et seulement si $v^2 = u$ et il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et $v(e_i) = \mu_i e_i$ pour $i = 1 \cdots n$.
$v^2 = u$ si et seulement s'il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $v(e_i) = \mu_i e_i$ et $\mu_i^2 = \lambda_i$ pour $i = 1 \cdots n$.
<u>Premier cas</u> : il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} < 0$. Alors l'équation $X^2 = A$ n'a pas de solution.
<u>Deuxième cas</u> : il existe $i_0 \in 1, n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} = 0$ et toutes les autres valeurs propres de u sont strictement positives. Alors $\mu_{i_0} = 0$ et pour $i \neq i_0$, $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ ou $\mu_i = -\sqrt{\lambda_i}$: on a donc 2^{n-1} possibilités pour la famille (μ_i) et donc 2^{n-1} solutions à l'équation $X^2 = A$.
<u>Troisième cas</u> : toutes les valeurs propres de u sont strictement positives. On a 2^n solutions à l'équation $X^2 = A$.

Exercice 9
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que
$$f \circ g - g \circ f = f.$$

1. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.
   (b) En déduire que f est nilpotente.

On suppose de plus que $f^{n-1} \neq 0$.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que le noyau de f est stable par g.

4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de g est

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda + n - 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 9

1. (a) On procède par récurrence.
   La propriété est immédiatement vraie pour $k = 1$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$. On compose par f à gauche :

$$f^{k+1} \circ g - f \circ g \circ f^k = kf^{k+1} \qquad (1).$$

   On compose à droite par f^k la relation $f \circ g - g \circ f = f$: on obtient

$$f \circ g \circ f^k - g \circ f^{k+1} = f^{k+1} \qquad (2).$$

   On ajoute (1) et (2) : $f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} = (k+1)f^{k+1}$.
   Par le principe de récurrence, la propriété voulue est démontrée.

   (b) Supposons que f ne soit pas nilpotente : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \neq 0$. On définit $T : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $u \mapsto u \circ g - g \circ u$. T est bien un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$T(f^k) = kf^k.$$

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, k est une valeur propre de T. Le spectre de T est infini : contradiction ($\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie).

2. Soit $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$. On montre que $(e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e))$ est une base de E.
   On pose $\mathcal{B} = (f^{n-1}(e), \ldots, f(e), e)$. La matrice représentative de f dans cette base a bien la forme voulue. (On a bien $f^n = 0$).

3. Soit x dans le noyau de f. On a $f(g(x)) - g(f(x)) = f(x)$, donc $f(g(x)) = 0$: $g(x)$ est bien dans le noyau de f.

4. On note $B = (b_{i,j})$ la matrice représentative de g dans la base $\mathcal{B}$ trouvée en 2 et $A = (a_{i,j})$ celle de f. $f \circ g - g \circ f = f$ donne, pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = a_{i,j}.$$

Comme $a_{u,v} = 0$ lorsque $u \neq v - 1$, et $a_{v-1,v} = 1$ sinon, il reste

$$b_{i+1,j} - b_{i,j-1} = a_{i,j}$$

si $i \leq n - 1$ et $j \geq 2$.
Sinon, pour $i = n$ et $j \geq 2$, $0 - b_{n,j-1} = 0$.
Ensuite, pour $i \leq n - 1$ et $j = 1$, $b_{i+1,j} = 0$.
Enfin, pour $i = n$ et $j = 1$, $0 = 0$...
$j = i + 1$ dans le premier cas donne, pour $i = 1 \cdots n - 1$,

$$b_{i+1,i+1} - b_{i,i} = 1$$

ce qui donne bien la diagonale voulue en posant $\lambda = b_{1,1}$.
Les deux cas suivants, donne la première colonne remplie de 0 sous le λ et la dernière ligne remplie de 0 avant le $\lambda + n - 1$.
On réutilise le premier cas avec $j = i$ pour obtenir $b_{i+1,i} = b_{i,i-1}$ pour $i = 2 \cdots n - 1$, ce qui propage, en diagonale, les 0 sous la diagonale. On a bien la forme voulue pour B.

Exercice 10
Pour $x > 0$, posons

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t + x} dt$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner son sens de variation.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Sachant que $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$ pour $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} - \ln(x).$$

4. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Solution 10

1. On applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.
   • $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\cos t}{t+x}$ est continue et donc intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   • $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto \frac{\cos t}{t+x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{-\cos t}{(t + x)^2}.$$

   • $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   • Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in [a, b]$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left| \frac{-\cos t}{(t + x)^2} \right| \leq \frac{1}{a^2}.$$

   Or $t \mapsto \frac{1}{a^2}$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est $x \mapsto - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt$.
   Comme cos est à valeurs positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On pense à appliquer le théorème de convergence dominée généralisé.
   - $\forall x \in [1,+\infty[$, $t \mapsto \frac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   - $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\cos t}{t+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - $\forall x \in [1,+\infty[$, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,
   $$\left|\frac{\cos t}{t+x}\right| \leq 1.$$

   Comme $t \mapsto 1$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'encadrement donné permet décrire, par croissance de l'intégrale
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\frac{t^2}{2}}{t+x}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t+x}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t+x}dt.$$
   Toutes ces intégrales existent puisqu'il s'agit d'intégrales sur un segment d'une fonction continue. Les deux intégrales qui encadrent se calculent puisqu'il s'agit d'intégrer des fonctions rationnelles. On trouve
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\frac{t^2}{2}}{t+x}dt = -\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{2}-1\right)\left(\ln\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \ln(x)\right)$$
   et
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t+x}dt = \ln\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \ln(x).$$
   Ces deux fonctions sont bien équivalentes à $-\ln(x)$ lorsque x tend vers 0, ce qui permet de conclure par encadrement.

4. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq t+x \leq \frac{\pi}{2}+x$ et donc, par positivité de cos sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et par croissance de l'intégrale
   $$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt \leq f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt.$$
   Ce qui donne aussi
   $$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$
   On conclut alors par encadrement que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Exercice 11

Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes identiquement distribuées, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = q = 1-p.$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une nouvelle variable aléatoire : $T_n = \prod_{k=0}^{n} X_k$.

1. Donner la loi de T_n et son espérance éventuelle.

2. Soit V une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner la loi de $\prod_{k=0}^{V} X_k$.

Solution 11

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \frac{1}{2}(1 - X_n)$. Alors, $Y_n \sim \mathcal{B}(p)$ et (Y_n) est aussi une suite de variables aléatoires indépendantes.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} Y_k$. $S_n \sim \mathcal{B}(n+1, p)$ par indépendance des Y_n.
   On a $T_n = (-1)^{S_n}$ (S_n compte le nombre de Y_k qui vaut 1, donc le nombre de X_k qui vaut -1). On en déduit :
   $$\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{0 \leq 2k \leq n+1} \binom{n+1}{2k} p^{2k} q^{n+1-2k}$$
   et
   $$\mathbb{P}(T_n = -1) = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} p^{2k+1} q^{n+1-2k-1}.$$
   Avec la formule du binôme, on remarque que
   $$(p+q)^{n+1} + (-p+q)^{n+1} = 2\mathbb{P}(T_n = 1) \quad \text{et} \quad (p+q)^{n+1} - (-p+q)^{n+1} = 2\mathbb{P}(T_n = -1)$$
   et donc
   $$\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1 + (q-p)^{n+1}}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_n = -1) = \frac{1 - (q-p)^{n+1}}{2}.$$

2. On remarque que $S = T_V$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet $((V = n))_{n \in \mathbb{N}}$:
   $$\mathbb{P}(S = 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = 1)\mathbb{P}(V = n) = \frac{1}{2} + \frac{q-p}{2} e^{\lambda(q-p-1)}$$
   et
   $$\mathbb{P}(S = -1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = -1)\mathbb{P}(V = n) = \frac{1}{2} - \frac{q-p}{2} e^{\lambda(q-p-1)}.$$