CCINP

Planche 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)\mathrm{ch}(x)$.

1. Sans le calculer, justifier l'existence du développement en série entière de f en 0. Donner son rayon de convergence.

2. On note $\sum a_n x^n$ ce développement. Calculer a_0 et montrer que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

3. Calculer $f^{(4)}$ et en déduire une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 vérifiée par f.

4. Trouver une relation de récurrence sur les a_n.

Solution 1

1. cos et ch sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, donc par produit de Cauchy, f est développable sur $\mathbb{R}$. Le rayon de convergence du développement en série entière est donc $+\infty$.

2. $a_0 = f(0) = 1$.
   f est paire, donc $a_1 = a_3 = 0$.
   Le développement limité en 0 de cos est $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ et celui de ch est $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$. On a donc celui de f qui est $f(x) = 1 + O(x^4)$. Comme la partie polynomiale de ce développement limité est donnée par le développement en série entière tronqué au degré 3 (Taylor-Young), on (re)trouve $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

3. On trouve $f^{(4)} = -4f$.

4. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{n=4}^{+\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4}x^n.$$

   L'équation différentielle se traduit donc, par unicité du développement en série entière, par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+4} = \frac{-4}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} a_n.$$

   On montre alors par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_{4n} = \frac{(-4)^n}{(4n)!}, \quad a_{4n+1} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0.$$

Planche 2
Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt$.

1. Quel est le domaine de définition D de F ?

2. Calculer $F(1)$ en posant $u = \frac{1}{t}$.
3. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in D$.

Solution 2

1. F est paire, on restreint donc son étude à $\mathbb{R}_+$.
Pour $x = 0$, $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ et elle y est de signe constant, donc $F(0)$ n'est pas défini.
Pour $x > 0$, $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est négligeable en 0 devant $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable sur $]0,1]$ et elle est négligeable en $+\infty$ devant $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.
$D = \mathbb{R}^*$.

2. On effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ sachant que $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient
$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{1}{u^2} du = -F(1).$$
Finalement, $F(1) = 0$.

3. Il suffit d'expliciter F sur $\mathbb{R}_+^*$. On complètera ensuite par parité.
Soit $x > 0$. On a
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} \frac{1}{x} dt.$$
On effectue le changement de variable $u = \frac{t}{x}$. On a alors
$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xu)}{1+u^2} du = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du + \frac{\ln(x)}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du.$$
$$F(x) = \frac{1}{x} F(1) + \frac{\ln(x)}{x} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \ln(x)}{2x}.$$
Finalement, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = \frac{\pi \ln(|x|)}{2|x|}$.

Planche 3

Soit u un endomorphisme symétrique dans une espace euclidien.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$ et ensuite que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.
2. On pose
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.
   (a) Trouver une base de l'image et du noyau de f.
   (b) Trouver la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$.

Solution 3

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$ et $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$. Alors
$$\langle y, x\rangle = \langle u(z), x\rangle = \langle z, u(x)\rangle = \langle z, 0\rangle = 0.$$
On a bien $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)^{\perp}$.
On conclut à l'égalité car on a égalité des dimensions (théorème du rang).

2. (a) On remarque que M est de rang 2 (les deux première colonnes sont indépendantes et les $n-1$ dernières sont égales). $((0,1,\dots,1),(1,0,\dots,0))$ est une base de l'image de f.
Le noyau de f est de dimension $n-2$ or clairement,
$((0,1,-1,0,\dots,0),(0,1,0,-1,\dots,0),\cdots,(0,1,0,\dots,0,-1))$ est une famille libre de $n-2$ vecteurs du noyau : c'en est donc une base.
M étant symétrique et la base canonique étant orthonormée pour le produit scalaire canonique, f est un endomorphisme symétrique pour $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Ce qui précède permet de dire que le noyau de f est l'orthogonal de son image, ce qui est cohérent avec les bases trouvées.
(b) On note p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Posons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{n-1}}(0,1,\dots,1)$ et $e_2 = (1,0,\dots,0)$. (e_1,e_2) est une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$. Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$p(x) = \frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1}(0,1,\dots,1) + x_1(1,0,\dots,0) = (x_1, \frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1}, \dots, \frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1}).$$
On en déduit que la matrice représentative de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

Planche 4

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres de u.

1. Démontrer, sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, que $P(u) = 0$ où P est le polynôme caractéristique de u.
2. Soit $x \in E$. On écrit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$.
3. Démontrer que les valeurs propres de u sont simples si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

Solution 4

1. Notons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{B}$.
$P = \chi_D = \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$. La matrice représentative de $P(u)$ dans $\mathcal{B}$ est $P(D)$.
Or $P(D) = \mathrm{Diag}(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n)) = 0$, d'où $P(u) = 0$.

2. Pour $l = 1 \cdots n$, $u^l(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^l e_k$, donc

$$\det_{\mathcal{B}}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

   avec $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le déterminant de Vandermonde associé aux λ_i.

3. Supposons que les valeurs propres de u soient deux à deux distinctes, alors $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$. On choisit $x = \sum_{k=1}^{n} e_k$, alors avec la question précédente,
   $\det_{\mathcal{B}}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) = V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$ et donc $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
   Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Alors $\det_{\mathcal{B}}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) \neq 0$ et donc $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$: les λ_k sont bien deux à deux distinctes.

Planche 5

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On pose $N : E \to \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 \, dt}$. On note aussi $\|.\|_\infty$, $f \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. On sait que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.

1. Montrer que N est une norme issue d'un produit scalaire à préciser.

2. N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

3. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.
   On pourra utiliser que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$.

Solution 5

1. On définie $\varphi : (f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Montrons que φ est un produit scalaire sur E.
   φ est clairement symétrique.
   φ est linéaire suivant sa deuxième variable par linéarité de la dérivation et de l'intégrale.
   φ est positive par positivité de l'intégrale.
   Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f, f) = 0$. Alors $f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 \, dt = 0$. Une somme de termes positifs est nulle seulement si tous ses termes sont nuls, donc $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2 \, dt = 0$. Mais f'^2 est continue et positive sur $[0,1]$, donc si son intégrale est nulle, alors $f' = 0$. Donc f est constante sur $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, alors $f = 0$.
   On a montré que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire. N est bien la norme issue de ce produit scalaire.

2. Supposons que N et $\|.\|_\infty$ soient équivalentes. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $f \in E$, $N(f) \leq \alpha \|f\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto t^n$. Alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f) = \sqrt{\frac{n^2}{2n-1}}$. On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{\frac{n^2}{2n-1}} \leq \alpha$$

   ce qui est absurde puisque le membre de gauche diverge vers $+\infty$.

3. Soit $f \in E$. Soit $x \in [0,1]$. On a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. Par inégalité triangulaire,
$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt.$$
Pour a et b réels, on a $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. On en déduit que
$$|f(x)|^2 \leq 2\left(|f(0)|^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|dt\right)^2\right).$$
Par inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$|f(x)|^2 \leq 2\left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2dt \int_0^1 1^2dt\right)$$
ou encore
$$|f(x)|^2 \leq 2N(f)^2 \quad i.e. \quad |f(x)| \leq \sqrt{2}N(f).$$
On passe à la borne supérieure pour $x \in [0,1]$ et on obtient bien $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.

Planche 6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$. On suppose que $A^T = -A$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
2. Montrer que $\det(A) = 0$ et que le spectre de f est $\{0\}$.
3. Montrer que $I_{2n+1} - A$ et $I_{2n+1} + A$ sont inversibles.
4. Montrer que $B = (I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1}$ est orthogonale et que $\det(B) = 1$.

Solution 6

1. On note $A = (a_{i,j})$, $\mathcal{B}(e_i)_{1\leq i\leq 2n+1}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{2n+1} x_ie_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{2n+1} y_je_j$. On a alors
$$\langle f(x), y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2n+1} x_if(e_i), \sum_{j=1}^{2n+1} y_je_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2n+1} x_i \sum_{k=1}^{2n+1} a_{k,i}e_k, \sum_{j=1}^{n} y_je_j\rangle = \sum_{i=1}^{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} x_iy_ja_{j,i}$$
par antisymétrie de A
$$\langle f(x), y\rangle = -\sum_{i=1}^{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} x_iy_ja_{i,j} = -\langle x, f(y)\rangle.$$
2. $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = -\det(A)$. On a bien $\det(A) = 0$.
0 est donc valeur propre de A et de f.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $x \neq 0$, tel que $f(x) = \lambda x$. On a alors
$$\langle f(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2 = -\langle x, f(x)\rangle = -\lambda\|x\|^2.$$
Comme $\|x\|^2 \neq 0$, alors $\lambda = 0$.
On a bien montré que le spectre de f est réduit à $\{0\}$.

3. -1 et 1 ne sont pas valeur propre de A (donc $I_{2n+1} - A$ et $I_{2n+1} + A$ sont injectives, donc bijectives).

4. On a $B^T = (I_{2n+1} - A)^{-1}(I_{2n+1} + A)$ et $B^{-1} = (I_{2n+1} + A)(I_{2n+1} - A)^{-1}$. Mais $(I_{2n+1} - A)$ commute avec A, donc avec $I_{2n+1}+A$, et son inverse aussi et donc $B^T = B^{-1}$: B est orthogonale. Le déterminant de A est donc 1 ou -1.
$\det(B) = \frac{\det(I_{2n+1}-A)}{\det(I_{2n+1}+A)}$. $\det(B)$ est du même signe que $\det(I_{2n+1} - A)\det(I_{2n+1} + A)$, i.e. que $\det(I_{2n+1} - A^2)$.
Or A^2 est symétrique réelle, donc diagonalisable par le théorème spectral. Par ailleurs, si λ est une valeur propre de A^2, il existe $X \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, tel que $A^2X = \lambda X$. On a alors (avec les notations naturelles)
$$\lambda\|x\|^2 = \langle x, \lambda x\rangle = \langle x, f^2(x)\rangle = -\langle f(x), f(x)\rangle = -\|f(x)\|^2.$$
Comme $\|x\|^2 > 0$, on a $\lambda \leq 0$. Si on note $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n+1})$ une matrice diagonale semblable à A, alors tous les λ_k sont négatifs et comme $I_{2n+1} - A^2$ est semblable à $\mathrm{Diag}(1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_{2n+1})$, le déterminant de $I_n - A^2$ est $\prod_{k=1}^{2n+1}(1 - \lambda_k) \geq 0$.
On a bien montré que $\det(B) \geq 0$ et donc $\det(B) = 1$.

Planche 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
2. On pose $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid DM = MD\}$.
   (b) Déterminer $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ est strictement inclus dans $\mathcal{C}(A)$.

Solution 7

1. On trouve $\chi_A = X^2(X + 1)$. Le spectre de A est donc $\{-1, 0\}$.
On remarque que le rang de A est 1, donc son noyau, i.e. le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, est de dimension 2 (théorème du rang). On en déduit que A est diagonalisable.
Il existe donc P inversible de taille 3 telle que $A = PDP^{-1}$. On peut choisir $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
(non demandé a priori).

2. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On écrit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
$DM = MD$ si et seulement si $c = f = g = h = 0$. Donc
$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D) \end{aligned}$$

Finalement
$$\mathcal{C}(A) = P\mathcal{C}(D)P^{-1}.$$

(c) $\mathcal{C}(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 5. $M \mapsto PMP^{-1}$ étant un isomorphisme de $\mathcal{C}(D)$ sur $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 5.
Or, pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$ et donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{2k} = A^2$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $A^{2k+1} = A$.
On en déduit que $\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$ est de dimension au plus 3 et donc ne peut pas être égal à $\mathcal{C}(A)$ qui est de dimension 5. Comme on a toujours
$\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big) \subset \mathcal{C}(A)$, cette inclusion est bien stricte.
On peut préciser la dimension de $\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ à l'aide du polynôme minimal de A. Comme elle est diagonalisable et que son spectre est $\{-1, 0\}$, son polynôme minimal est $X(X-1)$. Il est de degré 2, donc $\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ est de dimension $2 < 5$...

Planche 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien. Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit p un entier impair.
   (a) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique v de E tel que $v^p = u$.
   (b) Montrer que v admet les mêmes sous-espaces propres que u et que v et u ont le même nombre de valeurs propres.
   (c) Montrer que v est unique.
2. Cette fois-ci p est pair. Les conclusions de la question précédente sont-elles conservées ?

Solution 8

1. (a) Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, constituée de vecteurs propres de u. On écrit, pour $i = 1 \cdots n$, $u(e_i) = \lambda e_i$.
   $t \mapsto t^p$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $i = 1 \cdots n$, il existe donc $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_i^p = \lambda_i$.
   On sait qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour $i = 1 \cdots n$, $v(e_i) = \mu_i e_i$. Cet endomorphisme est symétrique puisque sa matrice représentative dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique (elle est diagonale).
   Par ailleurs, pour $i = 1 \cdots n$, $v^p(e_i) = u(e_i)$ et donc, par linéarité, $v^p = u$.

   (b) Soit ν une valeur propre de v. Soit $x \in E_\nu(v)$. Alors, $v(x) = \nu x$ et donc $v^p(x) = \nu^p x = u(x)$.
   Donc $x \in E_{\nu^p}(u)$. On a montré que $E_\nu(v) \subset E_{\nu^p}(u)$. Donc
   $$E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_{\nu_i}(v) \subset E_{\nu_1^p}(u) + \cdots + E_{\nu_q^p}(u) \subset E.$$
   Et donc les inclusions sont toutes des égalités : pour $i = 1 \cdots q$, $E_{\nu_i}(v) = E_{\nu_i^p}(u)$.
   Et les ν_i atteignent toutes les valeurs propres de u, sinon, il resterait un sous-espace propre de u alors que la somme de tous ceux trouvés recouvre déjà E.
   Enfin, $t \mapsto t^p$ étant bijective, il y a autant de ν_i que de ν_i^p : u et v ont le même nombre de valeurs propres.

(c) Soient v_1 et v_2 deux endomorphismes symétriques de E tels que $v_1^p = v_2^p = u$.
v_1^p et v_2^p sont identiques sur un sous-espace propre de u, qui est aussi un sous-espaces propre de v_1 et de v_2. En notant λ, μ et ν les valeurs propres respectives, on a pour x dans ce sous-espace propre, $u(x) = \lambda x = \mu^p x = \nu^p x$. Pour $x \neq 0$, $\mu^p = \nu^p$ et donc (p impair), $\mu = \nu$, d'où $v_1(x) = v_2(x)$. Comme les sous-espaces propres de u recouvrent E, finalement, $v_1 = v_2$.

2. Si p est pair, v n'existe pas forcément. Prenons $u = -\mathrm{Id}_E$. On ne peut pas trouvé de v symétrique tel que $v^2 = -\mathrm{Id}_E$. Sinon, en diagonalisant v avec le théorème spectral, on aurait dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ adaptée à v, pour $i = 1\cdots n$, $v(e_i) = \mu_i e_i$ et alors $v^2(e_i) = \mu_i^2 e_i = u(e_i) = -e_i$ et donc $\mu_i^2 = -1$, ce qui n'est pas possible.

Planche 9

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient f, u, v des endomorphismes de E. On suppose qu'il existe λ et μ réels tels que

$$f = \lambda u + \mu v, \quad f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v \quad \text{et} \quad f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v.$$

1. Donner des caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable utilisant des polynômes.

2. Montrer que f est diagonalisable.

3. Montrer que u et v sont diagonalisables dans une base commune lorsque λ, μ et 0 sont deux à deux distincts.

Solution 9

1. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

2. On vérifie que $f^3 - (\lambda + \mu)f^2 + \lambda\mu f = 0$. Donc $P = X^3 - (\lambda + \mu)X^2 + \lambda\mu X$ est un polynôme annulateur de f. Or $P = X(X - \lambda)(X - \mu)$.
Si λ, μ et 0 sont deux à deux distincts, P est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.
Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$. Alors, $f = \mu v$, $f^2 = \mu^2 v$ donnent $f^2 - \mu f = 0$ et donc $X(X - \mu)$ annule f et est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.
De même si $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$.
Si $\lambda = \mu \neq 0$. Alors $f = \lambda(u + v)$, $f^2 = \lambda^2(u + v)$ donnent $f^2 - \lambda f = 0$ et donc $X(X - \lambda)$ annule f et est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.
Si $\lambda = \mu = 0$, alors $f = 0$ et f est diagonalisable.
Dans tous les cas, f est diagonalisable.

3. On peut écrire $v = \frac{1}{\mu(\mu-\lambda)}(f^2 - \lambda f)$ et $u = \frac{1}{\lambda(\lambda-\mu)}(f^2 - \mu f)$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale. Alors celle de f^2 l'est aussi et par linéarité, celles de u et de v aussi : u et v sont bien diagonalisables dans une même base.

Planche 10

Pour α et x réels, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} x^n$.

1. Etudier la convergence simple de $\sum(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de la valeur de α.
   On note D_α le domaine de convergence simple et S_α la somme.

2. Etudier la convergence normale sur D_α.

3. Etudier la continuité de S_α sur D_α.

Solution 10

1. Si $|x|<1$, $n^2u_n(x)\to 0$ par croissances comparées et $\sum(u_n(x))$ converge absolument.
   Si $|x|>1$ alors, par croissances comparée, $|u_n(x)|$ est de limite infinie et $\sum(u_n(x))$ diverge grossièrement.
   $u_n(-1)$ est une série de Riemann qui converge seulement si $\alpha>1$.
   $u_n(1)$ est une suite alternée. Si $\alpha\leq 0$, cette quite n'est pas de limite nulle et la série associée diverge grossièrement. Si $\alpha>0$, elle vérifie les hypothèses de la régle spéciale ($|u_n|\to 0$ en décroissant en plus du caractère alterné). $\sum(u_n(1))$ converge alors.
   En résumé,

   $$\forall\alpha<0\ :\ D_\alpha=]-1,1[\ ;\ \forall\alpha\in]0,1]\ :\ D_\alpha=]-1,1]\ ;\ \forall\alpha>1\ :\ D_\alpha=[-1,1]$$

2. $\|u_n\|_{\infty,]-1,1[}=\frac{1}{n^\alpha}$ et il n'y a pas convergence normale sur $]-1,1[$ (et donc pas sur D_α) si $\alpha<1$.
   $\|u_n\|_{\infty,[-1,1]}=\frac{1}{n^\alpha}$ et il y a convergence normale sur D_α si $\alpha>1$.

3. Les u_n sont des fonctions continues sur D_α.
   Si $\alpha>1$, il y a convergence normale sur le domaine et donc continuité de S_α sur D_α.
   Pour tout $|a|<1$, $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]}=\frac{a^n}{n^\alpha}=o(1/n^2)$ est le terme général d'une série convergente et on a convergence normale de $\sum(u_n)$ sur tout compact de $]-1,1[$. Le théorème de continuité indique que $S_\alpha\in C^0(]-1,1[)$.
   Il reste à prouver la continuité en 1 dans le cas $\alpha\in]0,1]$. Dans ce cas, pour tout $x\in[0,1]$, $(u_n(x))$ vérifie les hypothèses de la règle spéciale. Ainsi

   $$\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|\leq|u_{n+1}(x)|\leq\frac{1}{n^\alpha}$$

   On a donc $\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\right\|_{\infty,[0,1]}\leq\frac{1}{n^\alpha}\to 0$ et la série converge uniformément sur $[0,1]$. On a ainsi continuité sur $[0,1]$ et donc en 1.

Planche 11

1. Calculer $\int_a^b\frac{1}{t^{3/2}+t^{1/2}}\,dt$ pour $0<a<b$. Indication : poser $u=\sqrt{t}$.

2. Prouver l'existence de

   $$R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}}$$

3. Montrer que

   $$2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\leq R_n\leq 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

4. Donner un équivalent de R_n.

Solution 11

1. La fonction intégrée étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, son intégrale existe sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.
   $t \mapsto \sqrt{t}$ étant de classe C^1 sur $]a, b[$ à dérivée ne s'annulant pas, on peut poser $u = \sqrt{t}$ pour obtenir
$$\int_a^b \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}}\, dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{2u}{u^3 + u}\, du = 2\left(\arctan(\sqrt{b}) - \arctan(\sqrt{a})\right)$$

2. $\frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}} \sim \frac{1}{k^{3/2}}$ est le terme général d'une série positive convergente. Son reste R_n est donc bien défini.

3. $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}+t^{1/2}}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a
$$\forall n \geq 2,\ \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}}\, dt \leq \frac{1}{n^{3/2} + n^{1/2}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}}\, dt$$
   En sommant ces relations de $n + 1$ à N, on trouve
$$\forall n \geq 1,\ \forall N \geq n + 1,\ \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}}\, dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}} \leq \int_n^N \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}}\, dt$$
   Il reste à utiliser l'expression obtenue plus haut de l'intégrale et à faire tendre N vers $+\infty$ pour conclure que
$$2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq R_n \leq 2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

4. Comme $\arctan(x) \sim x$ quand $x \to 0$, majorant et minorant équivalent à $2/\sqrt{n}$. En divisant par ce terme et par théorème d'encadrement, on a donc $\sqrt{n}R_n/2 \to 1$ c'est à dire
$$R_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Planche 12
Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
On note a_n le nombre de bijections de E dans E sans point fixe. On pose $a_0 = 1$.

1. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.

2. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $|x| < R$, la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ converge.

Dans ce cas, on note : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

3. Pour $|x| < 1$, calculer $e^x f(x)$.

4. En déduire une expression de a_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Dans une classe avec n élèves, un professeur rend les copies à ses élèves de manière aléatoire.
   On note l'événement D_n : "Aucun élève ne reçoit sa copie". Calculer la probabilité $\mathbb{P}(D_n)$.

Solution 12

1. On note B_k l'ensemble des permutations de E ayant exactement k points fixes. Les B_k forment une partition de l'ensemble $S(E)$ des permutations de E et donc

$$|S(E)| = n! = \sum_{k=0}^{n} |B_k|$$

Choisir un élément de B_k, c'est choisir les points fixes c'est à dire k éléments et permuter les $n-k$ autres éléments. On a donc $|B_k| = \binom{n}{k} a_{n-k}$ (valable si $k = n$ car $B_n = \{\mathrm{Id}\}$ est de cardinal $1 = a_0$). On a ainsi

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$$

2. Il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations et donc $a_n \leq n!$. Ainsi $0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq 1$ et la série entière associée est au moins de rayon de convergence égal à 1. On peut donc poser

$$\forall x \in]-1, 1[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

3. exp étant développable en série entière de rayon de convergence infini (et donc ≥ 1) on a (produit de Cauchy)

$$\forall x \in]-1, 1[, \; e^x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n \;\text{ avec }\; c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$$

Avec la première question, on obtient $c_n = 1$ et donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \; e^x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

4. Ainsi $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et on peut utiliser à nouveau le résultat sur le produit de séries entières :

$$\forall x \in]-1, 1[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \;\text{ avec }\; d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Par unicité des DSE, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

5. Il y a $n!$ façons de rendre les copies et a_n d'entre elles mènent à l'événement D_n. Par équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(D_n) = \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Planche 13

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$H = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \; x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

Calculer $d(e_1, H)$.

Solution 13
$H^\perp = \text{Vect}(e)$ avec $e = (1, \ldots, 1)$. Ainsi,

$$d(e_1, H) = \|e_1 - p_H(e_1)\| = \|p_{H^\perp}(e_1)\| = \frac{|(e_1|e)|}{\|e\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Planche 14
Déterminer la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite d'équation $6x = 4y = 3z$.

Solution 14
$(2, 3, 4) = e$ est un vecteur directeur de la droite. Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$, le projeté orthogonal de u sur D est

$$p(u) = \frac{(u|e)}{\|e\|^2} e = \frac{2x + 3y + 4z}{29}(2, 3, 4)$$

On peut ainsi obtenir les images de la base canonique. La matrice cherchée est

$$\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Planche 15
Pour $x \geq 0$, on pose

$$I(x) = \int_0^x \frac{t \sin(t)}{1 + t^2} \, dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_0^x \left| \frac{t \sin(t)}{1 + t^2} \right| \, dt$$

1. Montrer que I admet une limite finie en $+\infty$.
2. Montrer que
$$J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (u + k\pi) \frac{\sin(u)}{1 + (u + k\pi)^2} \, du$$
3. J admet-elle une limite en $+\infty$?

Solution 15

1. La fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}$ et $I(x)$ existe bien pour tout x. Une intégration par partie (on primitive sin) donne
$$I(x) = \left[-\frac{t}{1 + t^2} \cos(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \cos(t) \, dt$$
Le terme entre crochets est de limite nulle en $+\infty$. Le terme sous la seconde intégrale est $O(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable. A fortiori, l'intégrale admet une limite quand $x \to +\infty$.
2. $J(n\pi)$ est une intégrale sur $[0, n\pi]$ que l'on découpe par relation de Chasles en n morceaux. Dans le morceau sur $[k\pi, (k + 1)\pi]$, on pose $u = x - k\pi$. On obtient
$$J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (u + k\pi) \frac{|\sin(u + k\pi)|}{1 + (u + k\pi)^2} \, du$$
Comme $\sin(u + k\pi) = (-1)^k \sin(u)$ et comme sin est positive sur $[0, \pi]$, on obtient l'égalité demandée.

Planche 16

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Montrer que si A est un sev de E alors $\bar{A}$ est un sev de E.

2. Montrer qu'un hyperplan de E est soit fermé soit dense dans E.

3. Montrer que si K est un compact de E, alors il est fermé et borné.

4. On note $\ell^1(\mathbb{R})$ les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et on pose

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

   (a) Vérifier que $\|.\|$ est une norme sur $\ell^1(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang est un sev de $\ell^1(\mathbb{R})$.
   (c) $\bar{B}(0, 1)$ est-elle compacte dans $\ell^1(\mathbb{R})$?

Solution 16

1. Soient $x, y \in \bar{A}$. Il existe des suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A qui convergent vers x et y. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda x_n + y_n)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $\lambda x + y$ et cet élément est donc dans $\bar{A}$.
   Comme $A \subset \bar{A}$, $\bar{A}$ est non vide et c'est finalement un sous-espace vectoriel.

2. Soit H un hyperplan de E. On a $H \subset \bar{A} \subset E$. Comme un hyperplan est un sous-espace strict maximal (au sens de l'inclusion), on a donc soit $H = \bar{H}$ et H est fermé, soit $\bar{H} = E$ et il est dense.

3. Soit $K \subset E$ une partie compacte de E.
   Si, par l'absurde, K n'est pas bornée alors on peut construire une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n,\ \|x_n\| \geq n$. Aucune extraite de cette suite ne converge (car la suite des normes tend vers $+\infty$) ce qui contredit la compacité.
   Soit (a_n) une suite de $K^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in E$. Par compacité, il existe une extraite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge dans K. Mais comme $(a_{\varphi(n)})$ converge vers x, on a $x \in K$. Ainsi, K est un fermé.

4. (a) Il est immédiat que l'application est bien définie (car on travaille dans ℓ^1), positive. L'inégalité triangulaire et l'homogénéité découlent des mêmes propriétés dans $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue. Enfin, si $\|u\| = 0$, on a une somme de quantités positives qui est nulle et toutes les quantités sont nulle ce qui donne $u = 0$ et l'axiome de séparation.
   (b) Une combinaison linéaire de suites nulles à partir d'un certain rang est immédiatement nulle à partir d'un certain rang (par exemple le maximum des rangs pour les deux autres).
   (c) Notons δ_p la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice p qui vaut 1. Si, par l'absurde, la suite (δ_p) converge au sens de $\|.\|$ vers une suite u alors $\|u - \delta_p\| \to 0$ quand $p \to +\infty$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geq k + 1,\ |u_k| = |u_k - (\delta_p)_k| \leq \|u - \delta_p\| \to 0$$

   ce qui indique que $u = 0$. Or, $\|\delta_p\| = 1$ ne tend pas vers 0 et donc (δ_p) ne converge pas vers 0 au sens de $\|.\|$.
   La même preuve montre en fait qu'aucune extraite de (δ_p) ne converge.
   Comme les δ_p sont dans la boule unité, cette dernière n'est pas compacte.

Planche 17
Soit $f\ :\ x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2}\ dt$.

1. Etudier f
2. Trouver le développement en série entière de f à l'origine.
3. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Solution 17

1. $g\ :\ t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et par théorème fondamental $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\ dt$ est une primitive de g (celle qui s'annule en 0). Or,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = G(2x) - G(x)$$

Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

Ainsi f' s'annule en $x_1 = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$, $x_2 = -x_1$, est positive sur $[x_1, x_2]$ et négative ailleurs ce qui permet d'obtenir les variations de f.
Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable aux voisinages des infinis, f est de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On obtient le DSE de G en primitivant celui de g. On en déduit alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}(2^{2n+1} - 1)t^{2n+1}$$

3. Une intégration par parties donne (en primitivant $2te^{-t^2}$ et en dérivant $\frac{1}{2t}$)

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-4x^2}}{4x} - \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\ dt$$

Dans le membre de droite, le second terme est négligeable devant le premier. Ainsi

$$f(x) + \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\ dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

Or, $0 \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\ dt \leq \frac{1}{2x^2} f(x) = o(f(x))$ et le membre de gauche équivaut à $f(x)$. Finalement,

$$f(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

Planche 18

1. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'une solution $a_n \in [0, 1]$ à l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$.
   (b) Montrer que $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et en déduire limite et équivalent de a_n.
2. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = a_n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition D de S.
   (b) Etudier la continuité de S sur D.

Solution 18

1. (a) Posons $g(x) = x^n + \sqrt{n}x - 1$. $g'(x) = nx^{n-1} + \sqrt{n}$ est strictement positive sur $[0,1]$ et g est donc strictement croissante. Elle est continue et réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[g(0), g(1)] = [-1, \sqrt{n}]$. 0, qui est dans cette image, admet donc un unique antécédent a_n.

   (b) On a
$$g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}} \geq 0 \text{ et } g\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n} - \frac{1}{1+\sqrt{n}} \leq 0$$
   Par croissance de g, on en déduit que $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par encadrement, on a $a_n \to 0$ et $\sqrt{n}a_n \to 1$. Ainsi
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. (a) Le domaine de définition de f_n est $]-n, +\infty[$. L'intersection de ces domaines est $]-1, +\infty[$. Soit $x > -1$. On a alors $f_n(x) \sim a_n \frac{x}{n} \sim \frac{x}{n\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série convergente de signe constant. Ainsi
$$D =]-1, +\infty[$$

   (b) Les f_n sont continues sur D. Soit $[a,b] \subset]-1, +\infty[$. Pour $x \in [a,b]$, on a $\frac{x}{n} \in \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ et par croissance du logarithme
$$\forall x \in [a,b],\ |f_n(x)| \leq \max(|f_n(a)|, |f_n(b)|) \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$$
   Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_n)$ converge normalement sur tout segment de D et par théorème de continuité,
$$S \in C^0(D)$$

Planche 19

On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre n
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y^{(0)} = 0$$
où $y \in E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. On pose
$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k,\ u\ :\ f \in E \mapsto f',\ e^{\lambda(.)}\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda x}\ (\lambda \in \mathbb{C})\}$$
$\mathcal{S}_\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

1. Montrer que
$$\forall Q \in \mathbb{C}[X],\ \forall f \in E,\ Q(u)(f.e^{\lambda(.)}) = e^{\lambda(.)}Q(u + \lambda \mathrm{Id}_E)(f)$$

2. (a) Montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les racines de P de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$,
$$\mathcal{S}_\mathbb{C} = \bigoplus_{k=1}^{s} \ker((u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k})$$

   (b) Soit $f \in E$. Montrer que $g = f.e^{\lambda_k(.)} \in \ker((u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k})$ si et seulement si f est un polynôme de degré $\leq \alpha_k - 1$.

   (c) En déduire $\mathcal{S}_\mathbb{C}$.

3. Application : résoudre $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Solution 19

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par formule de Leibniz,

$$(fe^{\lambda(\cdot)})^{(k)} = e^{\lambda(\cdot)} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i f^{(k-i)}$$

Par ailleurs, par formule de binôme,

$$(u + \lambda Id_E)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{k-i}$$

et $u^{k-i}(f) = f^{(k-i)}$. La formule proposée est donc vraie quand $Q = X^k$. Comme les deux membres de l'égalité sont des fonctions linéaires de Q, le résultat reste vrai pour une combinaison linéaire des X^k, c'est à dire pour tout polynôme.

2. (a) $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est exactement égal au noyau de $P(u)$.
Par lemme des noyaux, et comme $P = \prod_{k=1}^{s}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et que les $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, on a le résultat annoncé.

   (b) La question 1 avec $Q = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $\lambda = \lambda_k$ donne

$$(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k}(fe^{\lambda_k(\cdot)}) = e^{\lambda_k(\cdot)} u^{\alpha_k}(f)$$

Ainsi, $g = f.e^{\lambda_k(\cdot)} \in \ker((u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k})$ signifie exactement que

$$e^{\lambda_k(\cdot)} f^{\alpha_k} = 0$$

et comme l'exponentielle ne s'annule pas, cela signifie que $f^{(\alpha_k)}$, c'est à dire que f est un polynôme de degré $\leq \alpha_k - 1$.

   (c) Les solutions sont donc exactement les fonctions de la forme

$$\sum_{k=1}^{s} f_k.e^{\lambda_k(\cdot)} \quad \text{avec} \quad f_k \in \mathbb{C}_{\alpha_k - 1}[X]$$

3. Ici, $P = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$ et les solutions sont les fonctions

$$x \mapsto e^{ix}(ax+b) + e^{-ix}(cx+d)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}^4$.

Planche 20

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. On rappelle qu'un endomorphisme τ est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau^{k-1} \neq 0$ et $\tau^k = 0$. On considère un endomorphisme u nilpotent.

1. Montrer que $\chi_u = X^n$.

2. Soit $v \in GL(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. On pose $f = u + v$. Montrer que f et v ont même spectre.

3. On pose $w = v^{-1} \circ u$. Montrer que w est nilpotent.

4. En déduire que $\det(f) = \det(v)$.

Solution 20

1. X^k annule u et donc 0 est la seule valeur propre complexe de u. Ainsi, $\chi_u = X^n$.

2. Soit λ une valeur propre de v. Comme u et v commutent, le sous-espace $E_\lambda(v)$ est stable par u. Comme il l'est par v, il l'est aussi par f. En notant f', u' les endomorphismes induits, on a a
$$f' = u' + \lambda \mathrm{Id}$$
$f' - \lambda \mathrm{Id} = u'$ est nilpotent et donc non inversible. Ainsi, λ est valeur propre de f' et donc aussi de f. Comme v et f jouent les même rôles ($v = f - u$ et f et $-u$ commutent), une valeur propre de f est aussi valeur propre de v. Les spectres sont donc égaux.

3. Comme v et u commutent, il en est de même de v^{-1} et u et $w^k = (v^{-1})^k \circ u^k = 0$. w et ainsi nilpotent.

4. Ona $f \circ v^{-1} = w + \mathrm{Id}$. w étant nilpotent, $(X-1)^k$ annule $f \circ v^{-1}$ et comme en question 1, $\chi_{f \circ v^{-1}} = (X-1)^n$. Le coefficient constant donne le déterminant fois $(-1)^n$ et donc $\det(f \circ v^{-1}) = 1$. On en déduit que $\det(f) = \det(v)$ (car det est un morphisme multiplicatif).

Planche 21
Soit n un entier supérieur à 1 et $I = [\![1, n+1]\!]$.
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.
Pour tous $i, j \in I$, on suppose que, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \lambda\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$.

1. Calculer λ.

2. Déterminer la loi de X et la loi de Y. Les 2 variables sont-elles indépendantes?

3. Déterminer la loi de $Z = X - 1$ et en déduire l'espérance et la variance de X.

4. On pose la matrice B d'ordre $n+1$ tel que $B = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = \mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$. Calculer les puissances de B. B est-elle diagonalisable ?

Solution 21

1. Les quantités proposées sont positives quand $\lambda > 0$. On définit une loi sur le couple (X, Y) si la somme de ces quantités vaut 1 (elles sont positives et on peut sommer dans l'ordre que l'on veut). On a
$$\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = \binom{n}{j-1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \binom{n}{j-1}$$
puis
$$\sum_{j=1}^{n+1} 2^n \binom{n}{j-1} = 4^n$$
Ainsi, $\lambda = \frac{1}{4^n}$.

2. X et Y jouent des rôles symétriques et ont même loi. En conditionnant par le système complet $(X = i)_{1 \leq i \leq n+1}$, on trouve $\mathbb{P}(Y = j)$. Le calcul est le même que ci-dessus :
$$\forall j \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}$$
On constate que $\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$ et les variables sont indépendantes.

3. $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(Z = i) = \mathbb{P}(X = i + 1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$$
Z suit la loi binomiale de paramètres n et $1/2$. Ainsi
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) + 1 = 1 + \frac{n}{2},\ \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$$

4. On a
$$(B^2)_{i,j} = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{i-1}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k-1}\binom{n}{j-1} = \alpha B_{i,j} \quad \text{avec} \quad \alpha = \lambda \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}^2$$
On peut remarquer que
$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$
On a finalement, $B^2 = \alpha B$, avec $\alpha = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.
$X^2 - \alpha X$ annule B et ce polynôme est simplement scindé, donc B est diagonalisable.
Par ailleurs, on prouve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \alpha^{k-1}B$.

Planche 22
On considère les fonctions définies par
$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1 + x^n}$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1[$. Y-a-t-il convergence uniforme ?

2. Etudier les convergence simple, uniforme et normale de $\sum(f_n)$.

Solution 22

1. Si $|x| < 1$, $f_n(x) \sim nx^{n-1} \to 0$ (croissances comparées).
Ainsi, $\sum(f_n)$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction nulle.
Comme $(1 - 1/n)^n \to 1/e$, on a $f_n(1 - 1/n) \sim \frac{ne^{-1}}{1+e^{-1}}$. Ainsi $\|f_n - 0\|_{\infty,[0,1[} \geq f_n(1 - 1/n)$ n'est pas de limite nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1[$.

2. Si $x \in [0, 1[$, $f_n(x) \sim nx^{n-1} = o(1/n^2)$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_n)$ converge simplement sur $[0, 1[$.
Si la série convergeai uniformément sur $[0, 1[$, la suite (S_n) des sommes partielles convergerait uniformément et il en serait de même de $(f_n) = (S_n - S_{n-1})$ ce qui n'est pas le cas. Il n'y a pas convergence uniforme et donc pas convergence normale sur $[0, 1[$.
Notons que si $a \in [0, 1[$ alors $|f_n(x)| \leq na^{n-1}$ et donc $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leq na^{n-1} = o(1/n^2)$ est le terme général d'une série convergente. La série est donc normalement convergente sur tout compact de $[0, 1[$.

Planche 23
On prend A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On suppose A non nulle et vérifiant $A^3 + A = 0$.

1. (a) Montrer que $\ker(u) \neq \{0\}$.

   (b) Montrer que $\ker(u) \oplus \ker(u^2 + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$ et que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Déterminer les éléments qui commutent avec A' et en donner une base.

3. Déterminer les solutions de $X^6 + X^2 = 0$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution 23

1. (a) $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ annule u. Si u était inversible, on aurait $X^2 + 1$ qui annule u et donc $u^2 = -\mathrm{Id}$. En passant au déterminant, cela donnerait $\det(u)^2 = -1$ ce qui est impossible. Ainsi u n'est pas inversible et $\ker(u) \neq \{0\}$.

   (b) Comme $X \wedge (X^2+1) = 1$, le théoème de décomposition des noyaux donne $\ker(u) \oplus \ker(u^2 + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.
   $F = \ker(u^2 + \mathrm{Id})$ est stable par u et u induit un endomorphisme v sur cet espace. On a $v^2 = -\mathrm{Id}_F$ et comme ci-dessus, F doit être de dimension paire. Comme u est non nul, $\dim(\ker(u)) < 3$ et donc $\dim(F) > 0$. On a donc $\dim(F) = 2$ et $\dim(\ker(u)) = 1$.
   Soit e_1 une base de $\ker(u)$ et $e_2 \in F$ non nul puis $e_3 = -u(e_2)$. On a $u(e_3) = -u^2(e_2) = e_2$. De plus, (e_2, e_3) est libre (si $ae_2 + be_3 = 0$ alors en composant par u, $-ae_3 + be_2 = 0$ et en combinant $a = b = 0$). Ainsi (e_2, e_3) est une base de F et (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, u est représenté par A'. A est donc semblable à A'.

2. Si M commute avec A' alors $\ker(A') = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$ est stable par M. De même, $\ker((A' + I_3))$ est stable par M. On en déduit que M est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$$
   Un raisonnement par coefficients indéterminés donne $d = -c$ et $b = e$. Le matrices convenables sont les éléments de l'espace engendré par
$$E_{1,1},\ E_{2,2} + E_{3,3},\ E_{3,2} - E_{2,3}$$

3. Supposons que $X^6 + X^2 = 0$. En posant $Y = X^2$, on a alors $Y^3 + Y = 0$. Y est donc semblable à A'. Il existe donc P inversible telle que $X^2 = P^{-1}A'P$, c'est à dire que $(PXP^{-1})^2 = A'$. Posons $M = PXP^{-1}$ en sorte que $M^2 = A'$. M et A' commutent donc et M est dans l'espace déterminé en question 2 :
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -d \\ 0 & d & b \end{pmatrix}$$
   En injectant dans la relation $M^2 = A'$, on trouve $a = 0$, $b^2 - d^2 = 0$ et $2bd = 1$. Ainsi $b = d = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $b = -d = - \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Réciproquement, soit X une matrice semblable à l'une des quatre matrices trouvées ci-dessus. C'est une solution de l'équation proposée.

Planche 24

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance finie.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq j)$.

   Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et suivant la même loi que X. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(X_i)$.

2. Exprimer $\mathbb{P}(M_n \leq k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \leq k)$.

3. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la loi uniforme sur $\mathbb{N}_k = [\![1, k]\!]$ avec $k > 1$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et sa limite quand $n \to +\infty$.

4. On suppose que $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ X_i \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(M_n)$.
   (b) Trouver la loi de $m_n = \min\limits_{1 \leq i \leq n}(X_i)$.
   (c) En utilisant m_2, en déduire $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$.

Solution 24

1. Comme $(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k)$ et que cette union est disjointe, on a
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$$
On a ainsi
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)\end{aligned}$$
Comme X admet une espérance, le membre de gauche est convergent de limite $\mathbb{E}(X)$. Remarquons que
$$0 \leq n\mathbb{P}(X > n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) \to 0$$
puisque le majorant est le reste d'une série convergente. On en déduit alors l'égalité demandée en faisant tendre n vers $+\infty$ dans notre égalité.

2. Le maximum de quantités est plus petit que k si chaque quantité est plus petite que k. Ainsi $(M_n \leq k)$ est l'intersection des $(X_i \leq k)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Les X_i étant indépendantes,
$$\mathbb{P}(M_n \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k)^n$$

3. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, $\mathbb{P}(X \leq i) = \frac{i}{k}$ et donc
$$\mathbb{P}(M_n \geq i) = 1 - \mathbb{P}(M_n \leq i-1) = 1 - \left(\frac{i-1}{k}\right)^n$$
Avec la question 1, on en déduit que
$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=1}^{k}\left(1 - \left(\frac{i-1}{k}\right)^n\right) = k - \frac{1}{k^n}\sum_{i=0}^{k-1} i^n$$
On remarque que
$$0 \leq \frac{1}{k^n}\sum_{i=0}^{k-1} i^n \leq \frac{1}{k^n}\sum_{i=0}^{k-1}(k-1)^n = k\left(\frac{k-1}{k}\right)^n$$
Cette quantité étant de limite nulle,
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(M_n) = k$$

4. (a) Cette fois $\mathbb{P}(X_n \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X_n \geq k+1) = 1 - q^k$ et donc $\mathbb{P}(M_n \leq k) = (1-q^k)^n$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-(1-q^k)^n)$$

   (b) Le minimum de nombres est plus grand que k si tous les nombres le sont. L'événement $(m_n \geq k)$ est donc égal à l'intersection des événements $(X_i \geq k)$ et

$$\mathbb{P}(m_n \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)^n = q^{(k-1)n}$$

   On en déduit que

$$\mathbb{P}(m_n = k) = \mathbb{P}(m_n \geq k) - \mathbb{P}(m_n \geq k+1) = q^{(k-1)n}(1-q^n)$$

   (c) En particulier (en reconnaissant une somme géométrique dérivée)

$$\mathbb{E}(m_2) = (1-q^2)\sum_{k=1}^{\infty} kq^{2(k-1)} = (1-q^2)\frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{1}{1-q^2}$$

   On a $\min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$ et donc $|X_1 - X_2| = X_1 + X_2 - 2m_2$. Par linéairité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(|X_1 - X_2|) = 2\mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(m_2) = \frac{2}{p} - \frac{2}{1-q^2} = \frac{2(1-p)}{p(2-p)}$$

Planche 25

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par :

$$(M \mid N) = \mathrm{Tr}\left({}^tNM\right)$$

et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. Montrer que deux matrices semblables n'ont pas forcément la même norme.

   On pourra prendre un contre exemple pour $n = 2$.

2. Soit P une matrice de taille n et a un réel tels que aP soit orthogonale.

   Vérifier dans un premier temps que P est inversible et que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|P^{-1}MP\| = \|M\|$$

3. (a) Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ le vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ses coefficients sont tous nuls sauf celui en position (i,j) qui vaut 1).
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.

   (b) En déduire que, si P est une matrice inversible vérifiant

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|P^{-1}MP\| = \|M\|$$

   alors il existe a un réel tel que aP soit orthogonale.

Solution 25

1. $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$ et $D + E_{1,n}$ sont sembables (car $D + E_{1,n}$ a pour spectre $\{1, \ldots, n\}$ est est donc diagonalisable à sous-espace propres de dimension 1). Leurs normes sont diiférentes : $\|D + E_{1,n}\|^2 = \|D\|^2 + 1$.

2. aP étant orthogonale, elle est inversible d'inverse a^tP. En particulier, a est non nul et P est inversible d'inverse $\frac{1}{a^2}{}^tP$ (puisque $I_n = {}^t(aP)(aP) = a^{2t}PP$). On a ainsi

$$ {}^t(P^{-1}MP)P^{-1}MP = {}^tP^tM^t(P^{-1})P{-}1MP = (a^2P^{-1})^tM(\frac{1}{a^2}P)P^{-1}MP = P^{-1t}MMP $$

   Deux matrices semblables ayant même trace, on trouve $\|P^{-1}MP\| = \|M\|$.

3. (a) Un calcul élémentaire donne (puisque $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$)

$$ AE_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} \quad \text{et} \quad E_{i,j}A = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}E_{i,k} $$

   (b) $M \mapsto P^{-1}MP$ est un endomorhisme de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose dans cette question que cet endomoporphisme conserve la norme de $M_n(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme orthogonal de $M_n(\mathbb{R})$. Il conserve donc aussi le produit scalaire et ainsi

$$ \forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ (P^{-1}AP|P^{-1}BP) = (A|B) $$

   c'est à dire

$$ \forall A, B,\ \mathrm{Tr}({}^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP) = \mathrm{Tr}({}^tAB) $$

   Dans le membre de droite on a un terme qui s'écrit $\mathrm{Tr}({}^tPM)$ et qui vaut aussi $\mathrm{Tr}(M^tP)$. Ainsi

$$ \forall A, B,\ \mathrm{Tr}({}^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP^tP) = \mathrm{Tr}({}^tAB) $$

   Si on pose $Q = P^tP$, ceci s'écrit

$$ \forall A, B,\ \mathrm{Tr}({}^tAQ^{-1}BQ) = \mathrm{Tr}({}^tAB) $$

   En choisissant $B = QC$ on a alors

$$ \forall A, C,\ \mathrm{Tr}({}^tACQ) = \mathrm{Tr}({}^tAQC) $$

   En prenant pour A les éléments de la base canonique, on a donc

$$ \forall C,\ CQ = QC $$

   Ainsi, Q est scalaire (prendre pour C les $E_{i,j}$). Il existe b tel que $P^tP = bI_n$. Comme P est inversible $b > 0$ (passer à la norme). $a = 1/\sqrt{b}$ convient.

Planche 26

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, distincts, et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit u sur $\mathbb{R}_n[X]$ par
$u(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable et donner ses sous-espaces propres.

Solution 26

1. La linéarité de u est immédiate. On a

$$ u(X^k) = kX^{k-1}(X - a)(X - b) - nX^{k+1} = (k - n)X^{k+1} - k(a + b)X^k + kabX^{k-1} $$

   Pour tout $k \le n$, $u(X^k) \in \mathbb{C}_n[X]$ (en particulier pour $k = n$ car alors $k - n = 0$). Par combinaisons linéaires, l'image de u est incluse dans $\mathbb{C}_n[X]$ et u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. *Une résolution d'équation différentielle donne une idée des valeurs à prendre pour les valeurs et vecteurs propres. On peut aussi deviner.*
   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, je pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. On a

   $$(X-a)(X-b)P_k' = (X-a)^k(X-b)^{n-k}(nx-kb-(n-k)a) = nXP+\lambda_k P_k \text{ avec } \lambda_k = -kb-(n-k)a$$

   Comme $a-b \neq 0$, on obtient $n+1$ valeurs propres distinctes. Comme on est en dimension $n+1$, u est diagonalisable et ses sous-espaces sont les $\mathrm{Vect}(P_k)$, de dimension 1.

Planche 27

Soit n un entier non nul et p entier compris entre 0 et n. On note $N(n,p)$ le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ayant exactement p points fixes, $D(n) = N(n,0)$ et $D(0) = 1$.
On définit : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{D(n)}{n!} x^n$.

1. Par un raisonnement de dénombrement montrer que : $N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p)$ et $\sum\limits_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$.
2. Justifier que f est définie sur $]-1,1[$ puis montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x)e^x = \dfrac{1}{1-x}$.
3. En déduire une expression de $N(n,p)$ et de $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{D(n)}{n!}$.

Solution 27

1. On note B_k l'ensemble des permutations de E ayant exactement k points fixes. Les B_k forment une partition de l'ensemble $S(E)$ des permutations de E et donc

   $$|S(E)| = n! = \sum_{k=0}^{n} |B_k| = \sum_{k=0}^{n} N(n,k)$$

   Choisir un élément de B_k, c'est choisir les points fixes, c'est à dire k éléments, et permuter les $n-k$ autres éléments. On a donc $N(n,k) = |B_k| = \binom{n}{k} D(n-k)$ (valable si $k = n$ car $B_n = \{\mathrm{Id}\}$ est de cardinal $1 = D(0)$).

2. Il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations et donc $D(n) \leq n!$. Ainsi $0 \leq \frac{D(n)}{n!} \leq 1$ et la série entière associée est au moins de rayon de convergence égal à 1. On peut donc poser

   $$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$$

   exp étant DSE de rayon de convergence infini (et donc ≥ 1) on a (produit de Cauchy)

   $$\forall x \in]-1,1[,\ e^x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{D(n-k)}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D(n-k)$$

   Avec la première question, on obtient $c_n = 1$ et donc

   $$\forall x \in]-1,1[,\ e^x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

3. Ainsi $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et on peut utiliser à nouveau le résultat sur le produit de séries entières :
$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad \text{avec} \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
Par unicité des DSE, on a donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ D(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
et donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{D(n)}{n!} = \frac{1}{e}$$
Avec la question 1, on a aussi
$$N(n,k) = \binom{n}{k} D(n-k) = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Planche 28

Soit a, b des réels distincts. On considère $E = \mathbb{R}^n$ et f, p, q des endomorphismes de E vérifiant :

- $p \neq 0$ et $q \neq 0$;
- $p + q = \mathrm{Id}_E$;
- $f = ap + bq$;
- $f^2 = a^2 p + b^2 q$.

1. Calculer $(f - a\mathrm{Id}_E)(f - b\mathrm{Id}_E)$. En déduire que f est diagonalisable.
2. Montrer que p et q sont des projecteurs et que $pq = qp = 0$.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.
   (b) On suppose $ab \neq 0$. Montrer que f est bijective.
4. Montrer que p est la projection sur $E_a(f)$ parallèlement à $E_b(f)$ et que q est la projection sur $E_b(f)$ parallèlement à $E_a(f)$.

Solution 28

1. On a
$$(f - a\mathrm{Id}_E)(f - b\mathrm{Id}_E) = f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}$$
En utilisant les trois dernières relations de l'énoncé ceci vaut $P(a)p + P(b)q$ où $P = X^2 - (a+b)X + ab$. Ainsi
$$(f - a\mathrm{Id}_E)(f - b\mathrm{Id}_E) = 0$$
Comme $a \neq b$, P est scindé simple et comme $P(f) = 0$, f est diagonalisable.

2. En composant $p + q = \mathrm{Id}_E$ à droite et gauche par p (resp. q), on trouve
$$p = p^2 + pq = p^2 + qp \quad \text{et} \quad q = q^2 + pq = q^2 + qp$$
On en déduit que $pq = qp$. Par ailleurs,
$$a^2 p + b^2 q = f^2 = (ap + bq)^2 = a^2 p^2 + 2abpq + b^2 q^2 = a^2(p - pq) + 2abpq + b^2(q - qp)$$
On en déduit que $(a^2 - 2ab + b^2)pq = 0$ et comme $a \neq b$, $(a-b)^2 \neq 0$ et donc $pq = 0$. On a finalement
$$p^2 = p,\ q^2 = q,\ pq = qp = 0$$

3. Les valeurs propres de f sont racines de tout polynôme annulateur et donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \{a, b\}$. Comme il y a au moins une valeur propre (f est diagonalisable), si cette inclusion est une égalité alors $f = a\mathrm{Id}_E$ (ou $b\mathrm{Id}_E$, le cas est similaire). Mais alors $a\mathrm{Id}_E = ap + bq$ donne $a(p+q) = ap + bq$ et donc $(a - b)q = 0$ ce qui est faux. On a montré que $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.

   Si $ab \neq 0$, 0 n'est pas valeur propre de f qui est donc injective et (endomorphisme en simension finie) bijective.

4. On a $E_a(f) \oplus E_b(f) = E$ et les projections proposées existent.
   Si $x \in E_a(f)$ alors
   $$ax = f(x) = ap(x) + bq(x) = ap(x) + b(x - p(x))$$
   Ainsi, $(a - b)x = (a - b)p(x)$ et donc $p(x) = x$. De même, $p(x) = 0$ si $x \in E_b(f)$. p est donc la projection annoncée. De même pour q.

Planche 29
On considère E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 = u$.

1. Montrer que u est diagonalisable et discuter du nombre p de valeurs propres de u.

2. Soit F un sous espace vectoriel de E.

   Montrer que u stabilise F si et seulement si il existe des sous espaces $F_1, \ldots, F_p$ tels que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ et que pour $i \in [\![1, p]\!]$, F_i est sous espace de $E_{\lambda_i}(u)$.

Solution 29

1. $P = X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$ annule u et est scindé simple. u est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont racines de P. u possède un nombre de valeurs propres pouvant être égal à $1, 2$ ou 3.

2. Supposons que chaque F_i soit un sous-espace de $E_{\lambda_i}(u)$ et notons F la somme (directe) des F_i. Soit $x \in F$. Il existe des $x_i \in F_i$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$. Et alors $u(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in \sum_{i=1}^{p} F_i = F$. F est donc stable par u.
   Réciproquement, supposons que F soit stable par u. u induit sur F un endomorphisme v qui est encore diagonalisable. F est alors somme directe des sous-espaces propres de v qui sont des sous-espaces de ceux de u.

Planche 30

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ non nuls. On pose $M = \begin{pmatrix} x^2 & yx & zx \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice ligne L telle que $M = {}^tLL$.

2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

3. Montrer que si M n'est pas diagonalisable, alors elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer M^p.

Solution 30

1. Si on pose $L = (x, y, z)$ que l'on identifie à une matrice ligne, on a

$$M = {}^tLL$$

2. M est donc de rang ≤ 1 (toutes ses lignes sont multiples de L). Elle est non nulle et donc de rang 1.
   0 est valeur propre avec un sous-espace propre de dimension 2 (théorème du rang). La trace donne la dernière valeur propre.
   - Si $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, on a une autre valeur propre (${}^tL$ est vecteur propre associé) et M est diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $2 + 1 = 3$).
   - Sinon, on a une unique valeur propre nulle et une matrice non nulle et M n'est pas diagonalisable.

3. Dans le cas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 0 est valeur propre triple et M est nilpotente. En remarquant que $L^tL = x^2 + y^2 + z^2 = 0$, on a même

$$M^2 = {}^tL(L^tL)L = 0$$

   Ainsi $\text{Im}(M) \subset \ker(M)$. L'image est de dimension 1 et on note e_1 un élément non nul de cette image. On compl!te en (e_1, e_2) base du noyau. Comme e_1 est dans l'image, il s'écrit $e_1 = Me_3$ et e_3 n'est pas dans le noyau donc (e_1, e_2, e_3) est libre. Dans cette nouvelle base, l'endomorphisme associé à M est représenté par $E_{1,3}$. Ainsi on a la similitude demandée.

4. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ alors $M^2 = 0$ et donc $M^p = 0$ pour tout $p \geq 2$. Plus généralement, on a

$$M^2 = {}^tL(L^tL)L = (x^2 + y^2 + z^2)M$$

   et une récurrence donne

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ M^p = (x^2 + y^2 + z^2)^{p-1}M$$

Planche 31
On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Situer les racines réelles de $X^3 - X - 1$.
2. Que valent $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_A(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \chi_A(x)$ et $\chi_A(0)$?
3. On suppose que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Solution 31

1. Une étude de fonction montre que $f\ :\ x \mapsto x^3 - x - 1$ est croissante sur $]-\infty, -1/\sqrt{3}]$ puis croissante sur $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ puis croissante ensuite. L'évaluation en $-1/\sqrt{3}$ (négative) montre qu'il y a une unique racine réelle et qu'elle est plus grande que $1/\sqrt{3}$. Comme $f(1) < 0 < f(2)$, elle est même dans $]1, 2[$.

2. χ_A est unitaire de degré n.
   Il est donc de limite $+\infty$ en $+\infty$.
   En $-\infty$, il tend vers $(-1)^n \times \infty$.
   On a enfin $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$.

3. Le polynôme $P = X^3 - X - 1$ annule A. A possède donc une racine réelle $\lambda \in]1, 2[$ et deux racines complexes non réelles et conjuguées $\alpha, \overline{\alpha}$. Le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P. On note p la multiplicité de λ et q celle de α. Comme A est réelle, c'est aussi la multiplicité de $\overline{\alpha}$.
   A est $\mathbb{C}$-trigonalisable et $\det(A) = \lambda^p |\alpha|^{2q} > 0$.

Planche 32
Posons
$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Arctan}(x\tan(t))dt$$

1. Montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.
2. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et donner une expression de $F'(x)$ sans $\int$ grâce au changement de variable $u = x\tan(t)$.
5. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{\pi^2}{4}$.
6. Montrer qu'en fait $F(x) \longrightarrow \frac{\pi^2}{4}$ pour $x \longrightarrow +\infty$.

Solution 32

1. On pose $f \ : \ x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x)$ et on vérifie que f' est nulle sur $\mathbb{R}^*$. f est donc constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Sa valeur en 1 montre que la constante vaut $\pi/2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Pour tout réel x, $t \mapsto \text{Arctan}(x\tan(t))$ est continue sur $[0, \pi/2[$ et prolongeable par continuité en $\pi/2$ (valeur $\pm\pi/2$ ou 0 selon que $x < 0$, $x > 0$ ou $x = 0$). Elle est donc intégrable sur l'intervalle et F est bien définie sur $\mathbb{R}$. Son imparité découle immédiatement de celle de tan.

3. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x,\ t \mapsto \text{Arctan}(x\tan(t))$ est continue sur $[0, \pi/2[$.
   - $\forall t \in [0, \pi/2[,\ x \mapsto \text{Arctan}(x\tan(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall t \in [0, \pi/2[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\text{Arctan}(x\tan(t))| \leq \frac{\pi}{2}$ et le majorant (constant) est intégrable sur $[0, \pi/2[$ (continu sur le segment).

4. On applique le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x,\ t \mapsto \text{Arctan}(x\tan(t))$ est intégrable sur $[0, \pi/2[$.
   - $\forall t \in [0, \pi/2[,\ x \mapsto \text{Arctan}(x\tan(t))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{\tan(t)}{1+x^2\tan^2(t)}$.
   - $\forall x,\ t \mapsto \frac{\tan(t)}{1+x^2\tan^2(t)}$ est continue sur $[0, \pi/2[$.
   - $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left|\frac{\tan(t)}{1+x^2\tan^2(t)}\right| \leq \frac{\tan(t)}{1+a^2\tan^2(t)}$. Le majorant est continu sur $[0, \pi/2[$ et prolongeabme par continuité en $\pi/2$ (vameur 0) et donc intégrable. On domine de même sur $[a, b] \subset \mathbb{R}^{*-}$ (ou on utilise plus loin l'imparité de F).

Ainsi $F \in C^1(\mathbb{R}^*)$ et

$$\forall x \neq 0,\ F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(t)}{1 + x^2 \tan^2(t)}\, dt$$

Pour $x \neq 0$, $t \mapsto x\tan(t)$ est de classe C^1 sur $]0, \pi/2[$ à dérivée ne s'annulant pas. C'est une bonne fonction de changement de variable et ce changement donne

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^2)(x^2+u^2)}\, du$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\},\ \frac{u}{(1+u^2)(x^2+u^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{u}{1+u^2} - \frac{u}{x^2+u^2}\right)$$

et ainsi (on reconnaît des dérivées de logarithme)

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\},\ F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

5. On a immédiatement

$$|F(x)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\mathrm{Arctan}(x\tan(t))dt| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\, du = \frac{\pi^2}{4}$$

6. On utilise le théorème de convergence dominée.

   - $\forall x > 0,\ t \mapsto \mathrm{Arctan}(x\tan(t))$ est continue sur $[0, \pi/2[$.
   - $\forall t \in [0, \pi/2[,\ \mathrm{Arctan}(x\tan(t)) \to \pi/2$ quand $x \to +\infty$.
   - $\forall x \geq 0,\ \forall t \in [0, \pi/2[,\ |\mathrm{Arctan}(x\tan(t))| \leq \frac{\pi}{2}$ et le majorant est intégrable.

   Le théorème s'applique et donne le résultat escompté.

Planche 33

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit

$$F_f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-itx) dt$$

1. On considère la fonction $g : t \mapsto \exp(-|t|)$. Justifier que F_g est définie sur $\mathbb{R}$, et calculer sa valeur pour tout réel x.

2. Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. On suppose de plus qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)| dt$ converge. Pour tout entier k, on pose $h_k : t \mapsto (-it)^k f(t)$.
   Justifier que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, F_{h_k} est définie sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, F_f admet une dérivée d'ordre k et que $F_f^{(k)} = F_{h_k}$.

Solution 33

1. $h : t \mapsto g(t)\exp(-itx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $|h(t)| = e^{-|t|} = o(1/t^2)$ aux voisinages des infinis, h est intégrable sur $\mathbb{R}$ et F_g est bien définie sur $\mathbb{R}$. On a
$$\int_0^{+\infty} g(t)\exp(-itx)\,dt = \int_0^{+\infty} \exp(t(-ix-1))\,dt = \left[\frac{1}{-ix-1}\exp(t(-ix-1))\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{ix+1}$$
et de même
$$\int_{-\infty}^0 g(t)\exp(-itx)\,dt = \int_{-\infty}^0 \exp(t(-ix+1))\,dt = \frac{1}{1-ix}$$
Il reste à sommer pour conclure que
$$\forall x,\ F_g(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

2. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $|f(t)\exp(-itx)| = |f(t)|$, on a immédiatement que $F_f(x)$ existe pour tout x.

3. $t \mapsto (-it)^k f(t)$ est continue et au voisinage des infinis, si $0 \leq k \leq n$, $|(-it)^k f(t)| \leq |t^n f(t)|$. Le majorant est intégrable et notre fonction l'est aussi. Ainsi, la question précédente indique que F_{h_k} est définie sur $\mathbb{R}$.
Il reste à utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x,\ t \mapsto f(t)\exp(-itx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall t,\ x \mapsto f(t)\exp(-itx)$ est de classe C^n et ses dérivées sont les $t \mapsto h_k(t)\exp(-itx)$.
   - $\forall x,\ t \mapsto h_k(t)\exp(-itx)$ est continue.
   - Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $|h_k(t)\exp(-itx)| \leq |h_k(t)|$ qui est une dominatrice intégrable indépendante de x.

Planche 34

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ sur $]0, 1]$.
2. On pose $u_n(x) = x^{2n}(\ln x)^2$ pour n entier et $x \in]0, 1]$. Pour n entier, montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0, 1]$ et calculer $\int_0^1 u_n(x)dx$.
3. Déterminer une écriture de $I = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx$ sous forme de somme.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

Solution 34

1. f est continue sur $]0, 1]$ et $o(1/\sqrt{x})$ au voisinage de 0 (croissances comparées). Elle est intégrable sur $]0, 1]$.

2. Le même raisonnement donne l'intégrabilité de u_n sur $]0, 1]$. Une première intégration par parties (on doit bien sûr vérifier que le terme tout intégré admet une limite en 0) donne
$$\int_0^1 u_n = \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\ln^2(x)\right]_0^1 - \frac{2}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\,dx$$
Le crichet est nul et on recommence une IPP (même remarque)
$$\int_0^1 u_n = -\frac{2}{(2n+1)^2}\left[x^{2n+1}\ln(x)\right]_0^1 + \frac{2}{(2n+1)^2}x^{2n}\,dx = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

3. En utilisant le DSE de $1/(1+u)$, on a

$$\forall x \in]0,1],\ \frac{\ln(x)^2}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k(x)$$

$\sum((-1)^k u_k)$ est une série de fonctions continues qui converge simplement sur $]0,1]$ vers f continue. De plus $\int_0^1 |u_n|$ est le terme général d'une série convergente par la question précédente. On peut alors utiliser le théorème d'interversion terme à terme :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{(2n+1)^3}$$

4. La série précédente est alternée et son terme général est décroissant en module, de limite nulle. Par règle spéciale, le reste d'ordre n de la série est majoré en module par $\frac{2}{(2n+3)^3}$. On calcule n pour que ce reste soit $\leq \varepsilon$ et il reste à calculer la somme partielle d'ordre n de la série.

Planche 35

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle .,. \rangle$, un produit scalaire quelconque. Soit f un endomorphisme symétrique à valeurs propres > 0.

1. Montrer que pour tout $h \neq 0$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, $\langle f(h), h\rangle > 0$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ fixé défini par $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$.
   (a) Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle.
   (b) À l'aide des questions précédentes, montrer que g admet un point critique unique z_0 tel que $z_0 = f^{-1}(u)$.
   (c) Montrer que g admet en z_0 un minimum global.

Solution 35

1. Il existe (théorème spectral) une b.o.n. $(e_1,\dots,e_n)$ de diagonalisation pour f. Notons λ_i la valeur propre associée à e_i. On décompose h sur cette base : $h = h_1e_1 + \cdots + h_ne_n$ pour obtenir

$$(f(h)|h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i^2 > 0$$

l'inégalité étant stricte car si $h \neq 0$ alors l'un des h_i est non nul.

2. (a) Une application linéaire ℓ est différentiable et sa différentielle en tout point est égale à ℓ. De plus $(x,y) \mapsto (x|y)$ est différentiable et sa différentielle en (x,y) est $(a,b) \mapsto (x|b)+(a|y)$. On en déduit par somme et composition que g est différentiable en tout point et

$$\forall x,\ dg_x\ :\ h \mapsto \frac{1}{2}(f(h)|x) + \frac{1}{2}(f(x)|h) - (u|h)$$

   (b) Un point critique est un point où la différentielle est nulle. Comme f est symétrique, on a

$$\forall x,\ dg_x\ :\ h \mapsto \frac{1}{2}(h|f(x)) + \frac{1}{2}(f(x)|h) - (u|h) = (f(x)-u|h)$$

   Ainsi $\nabla.g(x) = f(x) - u$ et x est critique si $f(x) = u$. f étant inversible (0 n'est pas valeur propre), il y a un unique point critique qui est

$$z_0 = f^{-1}(u)$$

(c) On a

$$g(z_0+h)-g(z_0)=\frac{1}{2}(f(z_0)|h)+\frac{1}{2}(f(h)|z_0)+\frac{1}{2}(f(h)|h)-(u|h)$$

Comme $f(z_0)=u$, ceci se simplifie en

$$g(z_0+h)-g(z_0)=\frac{1}{2}(f(h)|z_0)+\frac{1}{2}(f(h)|h)-\frac{1}{2}(f(z_0)|h)$$

et comme f est symétrique,

$$g(z_0+h)-g(z_0)=\frac{1}{2}(f(h)|h)\geq 0$$

g admet donc un minimum (global) en z_0.

Planche 36

Soit $p\in\,]0,1[$ et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $S=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$, $U=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$ et $M=U\,{}^tU$.

1. (a) Si $k\in[\![1,n]\!]$, déterminer la loi de probabilité de X_k^2.
   (b) Calculer ${}^tUU$ en fonction de S.
   (c) Calculer M^2 en fonction de M et S. Donner un polynôme annulateur de M. La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de son spectre ?
2. (a) Déterminer les coefficients de M.
   (b) Déterminer la loi de $\mathrm{Tr}(M)$, donner son espérance et sa variance.
   (c) Donner les valeurs possibles de $\mathrm{rg}(M)$. Donner sa loi de probabilité.
3. Donner la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes.

Solution 36

1. (a) X_k^2 étant à vakeurs dans $\{0,1\}$ sui une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_k^2=1)=\mathbb{P}(X_k=1)=p$.
   (b) On a immédiatement
   $$S={}^tUU$$
   (c) Et on a
   $$M^2=U\,{}^tUU\,{}^tU=S.U\,{}^tU=SM$$
   $X^2-SX=X(X-S)$ annule donc M et le spectre de M est inclus dans $\{0,S\}$.
   Si $S\neq 0$, le polynôme annulateur trouvé est scindé simple et M est diagonalisable.
   Si $S=0$ alors M n'est diagonalisable que si elle est nulle (c'est à dire si tous les X_i le sont puisque $M_{i,j}=X_iX_j$ et M est non nulle si il existe i tel que $X_i=1$).
2. (a) $M_{i,j}=X_iX_j$ comme indiqué ci-dessus.
   (b) $\mathrm{Tr}(M)=\sum_{i=1}^n X_i^2=\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p (nombre de succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre).
   (c) M est le produit de deux matrices de rang ≤ 1 et est donc de rang ≤ 1 (il suffirait même que dans le produit une seule des matrices soit de rang 1). Ainsi $\mathrm{rg}(M)$ peut prendre les valeurs 0 ou 1 et est une variable de Bernoulli. M n'est nulle que si les X_i le sont toutes i.e. si S l'est. Le paramètre de la Bernoulli est donc $\mathbb{P}(S=0)=(1-p)^n$.

3. 0 est toujours valeur propre de M (si $n \geq 2$, puisque M est de rang 1). M possède deux valeurs propres distinctes si et seulement si $S \neq 0$ ce qui a lieu avec probabilité $1-(1-p)^n$.

Planche 37

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de f.
3. Rappeler le lemme des noyaux. En déduire deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ en somme directe et stables par f.
   On note F celui de dimension 1 et G celui de dimension 2.
4. Soit (u_1) une base de F et une base (u_2, u_3) de G. On pose d l'endomorphisme tel que
   $$d(u_1) = -u_1,\ d(u_2) = u_2,\ d(u_3) = u_3$$
   (a) Montrer que f et d commutent.
   (b) On pose $n = f - d$. Calculer n^2 et montrer que n est nilpotent. Montrer que n et d commutent.
   (c) Exprimer f^k pour $k \geq 1$ en fonction de n et d.

Solution 37

1. Un développement par rapport à la dernière colonne donne
   $$\chi_A = (X-1)^2(X+1)$$
   $A - I_3$ est de rang 2 et son noyau est de dimension 1. Il contient $(0,0,1)$ et donc $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}((0,0,1))$.
   $A + I_3$ est de rang 2 et son noyau contient $(2,0,-1)$. Ainsi $\ker(A + I_3) = \mathrm{Vect}((2,0,-1))$.
2. A n'est pas diagonalisable donc μ_A n'est pas scindé simple. Il divise χ_A et possède 1 et -1 (les valeurs propres) comme racine et est donc de degré ≥ 2. La seule possibilité est
   $$\mu_A = \chi_A = (X-1)^2(X+1)$$
3. Le lemme des noyaux indique que si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si $P \wedge Q = 1$ alors
   $$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$$
   Ici, il montre qu'en posant $G = \ker((A - I_3)^2)$ et $F = \ker(A + I_3)$, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. F étant de dimension 1, G est de dimension 2. Ces espaces sont stables par f comme noyaux de polynômes en f.
4. d agit comme l'identité sur G et comme $-\mathrm{Id}$ sur F. Les restrictions de d à F et G commutent donc avec celles de f. $d \circ f$ et $f \circ d$ sont donc égales car elles sont linéaires et égales sur deux supplémentaires.
   On peut ainsi utiliser la formule du binôme qui donne $n^2 = d^2 + f^2 - 2f \circ d$. Si $x \in F$, on a $f(x) = d(x) = -x$ et donc $n^2(x) = 0$. Si $x \in$ alors $(f - \mathrm{Id})^2(x) = 0$ et donc $f^2(x) - 2f(x) + x = 0$.

Comme $d(x) = x$, ceci s'écrit aussi $n^2(x) = 0$. On a donc $n^2 = 0$ et n est nilpotente. Enfin, d commute avec f et d et donc avec $n = f - d$.
On peut alors à nouveau utiliser la formule du binôme pour calculer $f^k = (n + d)^k$. Les itérées de f étant nulle à partir du rang 2, il reste

$$f^k = d^k + kd^{k-1} \circ n$$

Planche 38

1. On pose :

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{array} \right. \end{array}$$

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x) \mathrm{d}x = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n+1} \mathrm{d}x$.

2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n+1} \mathrm{d}x$.

   (a) Calculer I_0 et I_1.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

   (c) Trouver I_n en fonction de n.

   (d) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Solution 38

1. (a) x étant fixé, pour n assez grand ($n \geq x^2$), on a $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \to e^{-x^2}$. La suite (f_n) est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$ vers $x \mapsto e^{-x^2/2}$.

   (b) La majoration (de convexité) $\ln(1 - u) \leq u$ donne

$$\forall x \in [0, \sqrt{n}],\ 0 \leq f_n(x) \leq e^{-x^2}$$

   et la majoration reste vraie sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continu et négligeable devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$) et le théorème de convergence dominée indique alors que $x \mapsto e^{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (ce que l'on sait) et que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

   (c) L'application $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(u/\sqrt{n})$ est de classe C^1 sur $]0, \sqrt{n}[$ à dérivée ne s'annulant pas. C'est une bonne fonction de changement de variable et ce dernier donne (en particulier car $dx = \sqrt{n} \cos(u)\ du$)

$$\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\ dx = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos(u)^{2n+1}\ du$$

2. (a) On a immédiatement $I_0 = 1$. De plus, comme $\cos^3(x) = (1 - \sin^2(x))\cos(x)$,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \left[\sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

   (b) On effectue une intégration par partie en dérivant $\cos(x)^{2n}$:

$$I_n = \left[\cos(x)^{2n}\sin(x)\right]_0^{\pi/2} + 2n\int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n-1}\sin^2(x)\,dx$$

   Le terme entre crochets est nul ($n \geq 1$) et pour l'autre on écrit $\sin^2 = 1 - \cos^2$ pour obtenir

$$I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$$

   ce qui donne la relation voulue.

   (c) On vérifie par récurrence que

$$I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

   (d) Avec la formule de Stirling, on trouve alors

$$I_n \sim \frac{2^{2n}2\pi n(n/e)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}((2n+1)/e)^{2n+1}} \sim \sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\frac{1}{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n} e$$

   La parenthèse tend vers $1/e$ et on a finalement

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

3. Avec 1.c et cet équivalent, on trouve alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Planche 39

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. En déduire que f est croissante.
2. Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $f(nx) = nf(x))$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(x) = x$.
4. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Solution 39

1. Si $x \geq 0$, $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$ et comme f est un morphisme multiplicatif, $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$.
   Si $x \leq y$, $y - x \geq 0$ et comme f est un morphisme addictif, $f(y) - f(x) = f(y - x) \geq 0$. f est donc croissante.

2. On montre par récurrence que la proposition "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   <u>Initialisation</u> : $f(0) = 0$ est vrai car f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$.
   <u>Hérédité</u> : supposons le résultat vrai à un rang n. On a alors $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$.

3. Comme $f(x)+f(-x) = f(x-x) = f(0) = 0$, f est imapire et la propriété précédente reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$. En particulier $f(a) = af(1) = a$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.
   Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = a/b$. $bf(x) = f(bx) = f(a) = a$ et donc $f(x) = a/b = x$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par approximation décimale, en posant $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, on a $x_n \leq x \leq x_N + \frac{1}{10^n}$. Par croissance de f et comme le majorant et le minorant sont entier (et donc envoyés sur eux même par f), $x_n \leq f(x) \leq x_n + \frac{1}{10^n}$. Par encadrement, $f(x) = x$ (en faisant tendre n vers $+\infty$).

Planche 40

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice représentative A, nilpotent d'indice de nilpotence p, c'est-à-dire tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ soit libre

2. Que peut on en déduire sur p ?

3. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que A soit semblable à la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) On se place dans le cas $p = 2$. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 40

1. Comme $u^{p-1} \neq 0$, il existe a tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$. On suppose que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(a) = 0$. En composant par u^{p-1}, on trouve $\alpha_0 = 0$ puis en composant par u^{p-2} il vient $\alpha_1 = 0$ etc. (on peut faire une récurrence). La famille est donc libre.

2. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que $p \leq 3$ (une famille libre a aupljus 3 éléments).

3. (a) Comme $C^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $C^3 = 0$, $p = 3$ est la seule valeur envisageable. Réciproquement, si $p = 3$, $(u^2(a), u(a), a)$ est une base dans laquelle u est représenté par la matrice C.

   (b) Si $p = 2$ alors $u^2 = 0$ et donc l'image de u est incluse dans le noyau de u. Par théorème du rang, $\ker(u)$ est alors de dimension 2. On se donne un élément $e_2 \neq 0$ dans l'image de u et qui s'écrit donc $e_2 = u(e_3)$. On complète (e_2) en une base (e_1, e_2) de $\ker(u)$. Comme $e_3 \notin \ker(u)$, (e_1, e_2, e_3) est libre. C'est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u est représenté par la bonne matrice.

Planche 41

On note $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} \, \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que g est définie sur $]1, +\infty[$.

2. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

3. Calculer la limite de g en $+\infty$ et expliciter g sur $]1, +\infty[$.

Solution 41

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f\ :\ t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1. Au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \frac{e^{t(1-x)}}{2t}$. Si $1-x<0$, f est intégrable au voisinage de $+\infty$ (dominée par $1/t^2$). Si $1-x \geq 0$ alors $tf(t)$ est de limite infinie ou égale à 1 en $+\infty$ et f n'est pas intégrable. Ainsi
$$D(f) =]1,+\infty[$$

2. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
   - f est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $x>1$.
   - Pour tout $t>0$, $x \mapsto \dfrac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ de dérivée $x \mapsto -e^{-xt}\mathrm{sh}(t)$.
   - Pour tout $x>1$, $t \mapsto e^{-xt}\mathrm{sh}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall [a,b] \subset]1,+\infty[,\ \forall x \in [a,b],\ \forall t>0,\ |e^{-xt}\mathrm{sh}(t)| \leq e^{-at}\mathrm{sh}(t)$. Le majorant est, comme en première question, intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Le théorème indique que $g \in C^1(]1,+\infty[)$ et que
$$\forall x>1,\ g'(x) = -\int_0^\infty e^{-xt}\mathrm{sh}(t)\ dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2-1}$$
   le calcul de l'intégrale se faisant en exprimant sh avec la fonction exponentielle.

3. On a $\forall x \geq 2,\ |f(t)| \leq \frac{e^{-2t}\mathrm{sh}(t)}{t}$ et le majorant est intégrable. $f(t)$ tend vers 0 à $t>0$ fixé quand $x \to +\infty$. Par théorème de convergence dominée,
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$
   Avec l'expression de g',
$$\exists c/\ \forall x>1,\ g(x) = c + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
   Comme g est de limite nulle en $+\infty$, la constante c est nulle.

Planche 42

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n strictement positive. Soit u un endomorphisme symétrique de E. Soit p un entier naturel impair.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique v de E, tel que $v^p = u$. (Penser à considérer une matrice de u)
2. Montrer que u et v ont les même espaces propres et qu'ils ont le même nombre de valeurs propres différentes.
3. v est-il unique ?
4. Maintenant on considère p entier naturel non nul pair et v un endomorphisme symétrique tel que $v^p = u$
   (a) Que dire de l'existence de v ?
   (b) Si le spectre de u est inclus dans $\mathbb{R}^+$, que dire de v ?
   (c) Si de plus le spectre de v est inclus dans $\mathbb{R}^+$ que conclure ?

Solution 42

1. Par théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ composée de vecteurs propres pour u. Dans cette base, u est représenté par une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$.
   $x \mapsto x^p$ étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car p est impair), d_i possède un unique antécédent $\sqrt[p]{d_i} = d'_i$.
   Soit v l'endomorphisme représénté dans $\mathcal{B}$ par $D' = \text{diag}(d'_1, \dots, d'_n)$.
   Par construction, $v^p = u$. De plus, v est symétrique car représenté par une matrice symétrique dans une base orthonormée.

2. Si $v^p = u$ alors $vu = uv = v^{p+1}$. Ainsi, tout sous-espace propre pour u est stable par v. Notons v_i la restriction de v à $\ker(u - d_i\text{Id})$.
   La relation $v^p = u$ donne alors $v_i^p = d_i\text{Id}$. Ainsi, $X^p - d_i$ annule v_i. Or, d'_i est la seule racine réelle de ce polynôme et on sait que v_i est diagonalisable (car v l'est puisqu'il est symétrique). Ainsi, $v_i = d'_i\text{Id}$.
   En notant (quitte à renuméroter) $d_1, \dots, d_k$ les valeurs propres distinctes de u, $d'_1, \dots, d'_k$ sont des valeurs propres distinctes de v et $\ker(u - d_i\text{Id}) \subset \ker(v_i - d'_i\text{Id})$. Les sous-espaces propres de u d'une part et ceux de v d'autre part étant supplémentaires, ces inclusions sont des égalités. v et u ont les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres.

3. Le raisonnement ci-dessus montre que v est unique.

4. Le même raisonnement montre que si v convient alors $X^p - d_i$ annule v_i et v_i est diagonalisable. Il faut donc que $d_i \geq 0$.
   Réciproquement, si les valeurs propres de u sont positives, l'endomorphisme v dont la restriction à $\ker(u - d_i\text{Id})$ est $\sqrt[p]{d_i}$ (qui existe) est symétrique et vérifie $v^p = u$. v existe donc. Il n'y a cependant pas unicité car on peut aussi choisir (par exemple) $v_i = -\sqrt[p]{d_i}\text{Id}$ (il y a d'autres solutions).
   Si on impose que les valeurs propres de v sont positives, on retrouve en revanche l'unicité ($x \mapsto x^p$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans lui même).

Planche 43

Soit E un espace préhilbertien réel, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que : $\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2$. On pose $F = \text{Vect}((e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$.

1. Déterminer l'orthogonal de F. Que peut-on en déduire sur $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$? sur E ?

2. Soit $u : x \mapsto x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.
   (a) Justifier que u est symétrique.
   (b) Montrer que $\forall x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0$.
   (c) En déduire que $\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Solution 43

1. Si $x \in F^\perp$ alors $\forall i,\ \langle x, e_i \rangle = 0$ et donc $\|x\|^2 = 0$ puis $x = 0$. On en déduit que $F^\perp = \{0\}$.
   Comme F est de dimension finie, $F \oplus F^\perp = E$ et donc ici $F = E$.
   On en déduit que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E et que E est de dimension finie.

2.
   (a) u est bien sur un endomoprhisme de E et on a
   $$\langle u(x) | y \rangle = \langle x, y \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$
   Cette expression est symétrique en x et y et donc $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ et u est symétrique.

(b) L'expression précédente donne

$$\langle u(x), x\rangle = \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 = 0$$

(c) Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. Ce qui précède donne

$$\lambda \|x\|^2 = \langle u(x), x\rangle = 0$$

et donc $\lambda = 0$. u est symétrique et donc diagonalisable. Comme 0 est sa seule valeur propre possible, $u = 0$ ce qui donne la relation demandée.

Planche 44

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Si u endomorphisme de E, on dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Un tel x est alors appelé $u-$générateur.

1. Soit u endomorphisme cyclique. Ecrire la matrice de u dans la base associée à un $u-$ générateur. Montrer que $\pi_u = \chi_u$ (π_u est le polynôme minimal).

2. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer l'équivalence suivante: u est cyclique si et seulement si u est nilpotent d'indice n.

3. Soit u un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que u est cyclique. Indication: on pose $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs propres associés aux$n$ valeurs propres distinctes. On pourra montrer que x est $u-$générateur.

Solution 44

1. En notant $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ la base $(e_i = u^i(x))$ on a $u(e_i) = e_{i+1}$ si $i < n-1$ et $u(e_{n-1}) = 0$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est alors

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que

$$\chi_u = \det(XI_n - M) = X^n$$

Par ailleurs, comme $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre, la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$ l'est a fortiori et u n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré $\leq n-1$. On en déduit que

$$\pi_u = \chi_u = X^n$$

2. Si u est nilpotent d'indice k alors son polynôme minimal est X^k. Pour que u soit cyclique, il faut avec la question précédente que $k = n$.
Réciproquement, supposons u nilpotent d'indice n. u^{n-1} est non nul et il existe donc x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Si $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ alors, en composant par u^{n-1} on obtient $\alpha_0 = 0$. En reprenant l'identité et en composant par u^{n-2}, on trouve alors $\alpha_1 = 1$. Une itération du procédé donne la nullité de tous les α_i. La famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est ainsi libre et, par cardinal, c'est une base de E. u est donc cyclique et x est un u-générateur.

3. Comme on travaille en dimension n et que les sous-espaces propres sont en somme directe et qu'il y a n sous-espaces propres, les sous-espaces propres sont tous de dimension 1 et u est diagonalisable. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. On pose enfin $x = e_1 + \cdots + e_n$. On a
$$u^k(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i$$
La matrice de $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ dans $(e_1, \dots, e_n)$ est une matrice de Vandermonde associée aux λ_k. Ceux-ci étant deux à deux distincts, cette matrice est inversible (on montre, par exemple, que les lignes sont indépendantes car une combinaison linéaire donne un polynôme de degré $\leq n-1$ ayant n racines différentes). La famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est donc une base et u est cyclique.

Planche 45

1. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ toutes deux diagonalisables telles que $\chi_M = \chi_N$. Montrer que $\exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $M = AB$ et $N = BA$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Montrer que n est pair.

Solution 45

1. M et N étant diagonalisables à même polynôme caractéristique sont semblables à une même matrice diagonale D. Il existe donc des matrices inversibles P et Q telles que
$$P^{-1}MP = Q^{-1}NQ = D$$
Ainsi $M = PDP^{-1} = PQ^{-1}QDP^{-1} = AB$ avec $A = PQ^{-1}$ et $B = QDP^{-1}$ qui vérifient $BA = QDP^{-1}PQ^{-1} = QDQ^{-1} = N$.
2. $X^2 + X + 1$ annule A et donc le pectre de A est inclus dans $\{j, j^2\}$. De plus, comme A est réelle, j et j^2 ont même multiplicité. Ainsi, n, qui est égale à la somme des multiplicité car dans $\mathbb{C}$ les polynômes sont scindés, est pair.

Planche 46

On définit une suite de fonctions: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0,\ f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}$. On note : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.
4. Donner un équivalent de f en 0.

Solution 46

1. Si $x > 0$, $f_n(x) \sim \frac{1}{xn^2}$ est le terme général d'une série absolument convergente.
2. On a $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq \frac{1}{1+n^2a}$ (pour $n \geq 1$) qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_n)$ converge normalement au voisinage de $+\infty$. Comme f_n est de limite nulle en $+\infty$ si $n \geq 1$ et $f_0 = 1$, le théorème de double limite donne
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

3. On utilise le théorème de régularité.
   Toutes les f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et
$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (n^2)^k}{k!(1+n^2x)^{k+1}}$$
   $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{(n^2)^k}{k!(1+n^2)^{k+1}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Les séries dérivées convergent ainsi normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et
$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*})$$

4. Soit $x > 0$. $t \mapsto \frac{1}{1+t^2x}$ est décoissante sur $\mathbb{R}^+$ et une comparaison série-intégrale donne
$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2x}\, dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x}$$
   L'intégrale vaut $\frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ et 1 est négligeable devant ce terme en 0. Ainsi
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

Planche 47
Soit P un polynôme réel scindé à racines simples

1. Montrer que P' est constant ou scindé à racines simples. On pourra utiliser un théorème de Rolle
2. Montrer que P et P' sont premiers entre eux
3. Montrer que il existe U, V dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $X = XU(X)P(X) + XV(X)P'(X)$.

Solution 47

1. Si le degré de P est inférieur ou égal à 1, P' est constant. Sinon, notons $x_1 < \cdots < x_n$ les racines distinctes de P. Par théorème de Rolle, P' admet une racine $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. On a ainsi $n-1$ racines pour P'. On les a toutes et P' est scindé.
2. P et P' sont scindés et sans racine commune. Ils n'ont donc pas de facteur irréductible commun et leur pgcd vaut 1.
3. Par Bézout, il existe U, V tels que $UP + VP' = 1$ et il suffit de multiplier par X pour conclure.

Planche 48
On pose $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. Soit P dans $\mathbb{R}_3[X]$. On étudie la divison euclidienne $AP = BQ + R$ avec Q dans $\mathbb{R}[X]$ et R dans $\mathbb{R}_3[X]$. On pose Φ l'application qui à P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe son reste par la division euclidienne R.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme.
2. Calculer l'image et le noyau de Φ
3. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner ses éléments propres. Φ est-il diagonalisable ?

Solution 48

1. On se donne $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ et on considère les divisions euclidiennes $AP_i = BQ_i + \Phi(P_i)$. Pour λ réel, on a alors
$$A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + \Phi(P_1) + \lambda\Phi(P_2)$$
$\Phi(P_1) + \lambda\Phi(P_2)$ étant de degré ≤ 3, ceci est une division euclidienne et
$$\Phi(P_1) + \lambda\Phi(P_2) = \Phi(P_1 + \lambda P_2)$$
Φ est ainsi linéaire. Comme par définition de la division euclienne l'image par Φ d'un élément est dans $\mathbb{R}_3[X]$, Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Si $\Phi(P) = 0$ alors AP est multiple de B. Comme $A = (X-1)(X+1)(X^2+1)$ et $B = X(X-1)(X^2+X+1)$, ceci impose que $X(X^2+X+1)$ divise P. Comme P est de degré ≤ 3, $P \in \mathrm{Vect}(X(X^2+X+1))$. La réciproque est immédiate et donc
$$\ker(\Phi) = \mathrm{Vect}(X(X^2+X+1))$$
L'image de Φ est alors de dimension 3 par théorème du rang. Je ne vois pas trop comment faire autrement que de trouver trois éléments indépendants. En anticipant sur la question suivante, je calcule
$$\Phi(1) = -1 + X,\ \Phi(X) = -X + X^2,\ \Phi(X^2) = -X^2 + X^3$$
Ces trois vecteurs étant indépendants, ils forment une base de l'image de Φ.

3. On calcule $\Phi(X^k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ pour obtenir les colonnes de la matrice. On trouve
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
On calcule le polynôme caractéristique de M (développement par par rapport à la ligne 1 puis remplacer la colonne 3 par la somme des autres fait apparaître un facteur $X\dots$) :
$$\chi_M = X(X+1)(X^2+3X+3)$$
Comme X^2+3X+3 est irréductible, χ_M n'est pas scindé et Φ n'est pas diagonalisable.

Planche 49

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$. On pourra considérer la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Etudier la monotonie de (u_n) et sa limite.
3. On pose $v_n = n + \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'intégrale.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Solution 49

1. $f\ :\ t\mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par théorème fondamental $F\ :\ x\mapsto \int_1^x f$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi
$$\forall x>0,\ F'(x)=f(x)>0$$
F est ainsi strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $]\lim_{0^-}F,\lim_{+\infty}F[$.
f est positive et non intégrable en 0 (équivalente à $1/t$). Ainsi, $F(x)$ est de limite $-\infty$ quand $x\to 0$.
f est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$ ($tf(t)$ étant de limite infinie). Ainsi $F(x)$ est de limite $+\infty$ quand $x\to+\infty$.
F réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ et $-n$ admet un unique antécédent u_n par F :
$$\exists\,!u_n>0/\ \int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,dt=n\ \text{ et on a }\ u_n=F^{-1}(-n)$$

2. F^{-1} est, comme F croissante strictement. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.
F^{-1} est de limite nulle en $-\infty$ (car F est de limite $-\infty$ en 0) et donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0$$

3. Une intégration par parties donne
$$n=\int_{u_n}^1\frac{e^t}{t}\,dt=\left[e^t\ln(t)\right]_{u_n}^1-\int_{u_n}^1 e^t\ln(t)\,dt=-\ln(u_n)e^{u_n}-\int_{u_n}^1 e^t\ln(t)\,dt$$
On en déduit que
$$v_n=n+\ln(u_n)=\ln(u_n)(1-e^{u_n})-\int_{u_n}^1 e^t\ln(t)\,dt$$
Comme $u_n\to 0$, $e^{u_n}-1\sim u_n$ et $\ln(u_n)(1-e^{u_n})\sim -u_n\ln(u_n)\to 0$. Par ailleurs $t\mapsto e^t\ln(t)$ est intégrable au voisinage de 0 (équivalente à $\ln(t)=o(1/\sqrt{t})$). Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} n+\ln(u_n)=-\int_0^1 e^t\ln(t)\,dt$$

4. En notant ℓ la limite ci-dessus, $n+ln(u_n)=\ell+o(1)$ et donc
$$u_n=e^{-n}e^{\ell}e^{o(1)}\sim e^{-n}e^{\ell}$$
qui est le terme général d'une série positive convergente.

Planche 50

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose, pour $x\geq 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $f_n(x)=x(1+n^\alpha\,\mathrm{e}^{-nx})$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme ?

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x$.

Solution 50

1. Pour $x=0$, $f_n(0)=0\to 0$ pour toute valeur de α.
Soit $x>0$; comme $n^\alpha e^{-nx}\to 0$ (croissances comparées), $f_n(x)\to x$.
Ainsi, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction identité.

2. Posons $g_n(x) = f_n(x) - x = xn^\alpha e^{-nx}$. Une étude de fonction montre que $|g_n|$ est maximale en $1/n$ et ainsi
$$\|f_n - \mathrm{Id}\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = g_n(1/n) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$
Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ seulement si $\alpha < 1$.

3. Dans le cas $\alpha < 1$, il y a a fortiori converge uniforme sur le segment $[0,1]$ et on est dans un cas où l'interversion limite-intégrale est licite. On obtient
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$
C'est en particulier vrai pour $\alpha = 1/2$.

Planche 51

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des complexes. On suppose que A représente un endomorphisme f d'un espace E de dimension n.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

2. On suppose désormais que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

   (a) Préciser $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

   (b) Montrer que $E = \ker(f) \bigoplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$

3. Montrer que λ est valeur propre de f ssi $\lambda = 0$ ou $\displaystyle\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.

4. Etudier la diagonalisabilité de f.

Solution 51

1. Les $n-1$ premières colonnes sont liées deux à deux. Ainsi, f est de rang ≤ 2. Il est de rang 2 si l'une des $n-1$ premières colonne est non nulle et indépedendantes de la dernière. Il est clair qu'une condition nécessaire est que l'un des a_i avec $i \leq n-1$ est non nul et cette condition est suffisante.

2. (a) Le noyau de f est de dimension $n-2$ par théorème du rang. En supposant que $a_i \neq 0$ pour un $i \leq n-1$, les vecteurs $a_i e_j - a_j e_i$ pour $j \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{i\}$ sont dans le noyau et indépendants. Il forment une base du noyau (où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$). L'image est de dimension 2 et engendrée par deux colonnes indépendantes et une base en est $(e_n, \sum_{i=1}^n a_i e_i)$.

   (b) Par théorème du rang, l'image et le noyau sont supplémentaires si et seulement s'il sont en somme directe i.e. $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$. $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f et f induit un endomorphisme g sur cette image. La condition signifie que $\ker(g) = \{0\}$ puisque $\ker(g) = \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Or, en posant $u_1 = e_n$ et $u_2 = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, on a
$$g(u_1) = u_2 \quad\text{et}\quad g(u_2) = \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 u_1 + a_n u_2$$

La matrice de g dans la base (u_1, u_2) est $\begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$. $\ker(g) = \{0\}$ si cette matrice est inversible c'est à dire si $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$.

3. Si λ est valeur propre de vecteur propre associé X alors
   - Soit $X \in \ker(f)$ et alors $\lambda = 0$
   - Soit $\lambda \neq 0$ et alors $X = \frac{1}{\lambda} f(X) \in \mathrm{Im}(f)$ et donc λ est valeur propre de g et donc racine de son polynôme caractéristique :
   $$\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$$

   La réciproque est immédiate.
4. On distingue les cas.
   - Si $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ alors le noyau et l'image ne sont pas supplémentaires donc f n'est pas diagonalisable (si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base diagonalisation de h diagonalisable alors l'image de h est engendrée par les $h(v_i) = \lambda_i v_i$ et donc pas les v_i associés aux valeurs propres non nulles ; les autres v_i engendrent le noyau).
   - Sinon, on a 0 de valeur propre de sous-espace propre associé de dimension $n - 2$. Avec la question précédente, on a une ou deux valeurs propres non nulle selon le signe du discriminant du polynôme caractéristique de g.
   S'il est non nul, il y a deux valeurs propres non nulles en plus et donc deux sous-espaces propres qui par dimension ne peuvent qu'être des droites. f est diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n).
   S'il est nul, g qui n'est pas une homothétie (matrice non scalaire) et ne possède qu'une valeur propre n'est pas diagonalisable donc f npn plus.

   Ainsi, f est diagonalisable si
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n^2 + 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$$

Planche 52
Les 2 questions sont indépendantes.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap O(n)$ (matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et orthogonales)
2. On admet que $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire dans $M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Prouver que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux pour ce produit scalaire.
   (b) Soit $A = (a_{i,j})$ fixéé. Calculer
   $$\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \le i,j \le n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$$

Solution 52

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap O(n)$ alors ses coefficients sont entiers et la somme par colonne de leurs carrés vaut 1. Il y a donc au plus un coefficient non nul par colonne et il vaut ± 1. Comme M est de plus inversible, les positions des coefficients non nuls sur une colonne donnée sont deux à deux distincts.
   Il existe donc une permutation $s \in S_n$ telle que $M_{i,j} = \pm \delta_{s(j),j}$.
   Réciproquement, les colonnes d'une telle matrice sont normées et deux à deux orthogonales et une telle matrice est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap O(n)$.
   Il y a finalement $2^n n!$ telles matrices (choix de la permutation et choix des signes).

2. (a) Soient A, S respectivement antisymétrique et symétrique. On a
   $$(A|S) = -\mathrm{Tr}(AS) \ \text{ et } \ (S|A) = \mathrm{Tr}(SA)$$
   Par les propriétés de la trace, $(A|S) = -(S|A)$ et par symétrie du produit scalaire $(A|S) = 0$.
   $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont ainsi orthogonaux (et donc en some directe).
   Pour toute matrice M, on a
   $$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM) \in S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$$
   Ainsi, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux (donc l'un est l'orthogonal de l'autre).

   (b) Comme $\|N\|^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} n_{i,j}^2$, il s'agit de calculer la distance de A à $S_n(\mathbb{R})$. D'après le cours, c'est le carré de la norme du projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$. La quantité cherchée est donc
   $$\left\| \frac{1}{2}(A - {}^tA) \right\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Planche 53

On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément p jetons dans l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le plus grand numéro tiré et Y celle donnant le plus petit.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}$.
2. (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) En déduire que, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \dfrac{(n-p)!k!p}{n!(k-p)!k}$.
   (c) Calculer l'espérance de X.
3. (a) Donner la loi de Y.
   (b) Montrer que $E(X) = pE(Y)$.

Solution 53

1. La formule étant donnée, on peut procéder par récurrence. Je propose une récurrence sur $n \ge p$ (à p fixé).
   - Initialisation : le résultat est immédiat pour $n = p$ (on a $p! = p!$).

- Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq p$ donné. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1} \frac{k!}{(k-p)!} &= \sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!} \\ &= \frac{(n+1-p+p+1)(n+1)!}{(p+1)(n+1-p)!} \\ &= \frac{(n+2)!}{(n+1-p)!}\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.

2. (a) L'issue d'un tirage est une p combinaisons d'éléments parmi n et il y a donc $\binom{n}{p}$ tirages possibles.

   (b) On a $X(\Omega) = [|p, n|]$. Pour $k \in [|p, n|]$ fixé, l'événement $X = k$ correspond à un tirage où la boule k est présente et où les autres sont de numéro $\leq k-1$. Il y a donc $\binom{k-1}{p-1}$ tels tirages et

$$\forall k \in [|p, n|],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}} = \frac{(k-1)!}{(p-1)!(k-p)!}\frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{p}{n!}\frac{k!(n-p)!}{k(k-p)!}$$

   (c) X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, son espérance existe et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \sum_{k=p}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=p}^{n} \frac{p}{n!}\frac{k!(n-p)!}{(k-p)!} \\ &= \frac{p(n-p)!}{n!}\frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!} \\ &= \frac{p(n+1)}{p+1}\end{aligned}$$

3. La loi Y est la même que celle de $n+1-X$ et on a donc

$$\forall k \in [|1, n+1-p|],\ \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n+1-k)$$

   En outre,

$$\mathbb{E}(Y) = n+1-\mathbb{E}(X) = (n+1)\left(1 - \frac{p}{p+1}\right) = \frac{n+1}{p+1}$$

   On a donc aussi,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\mathbb{E}(X)}{p}.$$

Planche 54

1. Dans cette question uniquement, A est la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1. Calculer A^2 puis trouver A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   A est-elle diagonalisable ? Trouver une matrice diagonale semblable à A.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1.

(a) Montrer que A est semblable à une matrice du type $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. En déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

(b) En déduire une expression de $\exp(A)$.

(c) Trouver une relation entre $\exp(A)$ et $\exp(B)$.

Solution 54

1. Ona $A^2 = nA$ et par récurrence immdiate, $\forall k \geq 1,\ A^k = n^{k-1}A$. Bien sur, $A^0 = I_n$.
$X^2 - nX = X(X-n)$ est un annulateur scindé simple de A et A est diagonalisable.
A est de rang 1 et donc $\ker(A)$ de dimension $n-1$. Comme A est diagonalisable, le sous-espace propre associé à n est de dimension 1 et A est semblable à $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)$.

2. (a) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base du noyau de A que l'on complète avec un vecteur e_n pour obtenir une base $\mathcal{B}$.
Dans cette base, l'endomorphisme canoniquement associé à A est représenté par une matrice du type B.
Or, $B^2 = a_n B$ et deux matrices semblables ont mêmes annulateurs. Ainsi $X^2 - a_n X$ annule A.
Par invariance de la trace par similitude, $a_n = \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$ et on a le résultat demandé.

   (b) On en déduit par récurrence que $A^k = \mathrm{Tr}(A)^{k-1}A$ pour $k \geq 1$ et ainsi
$$\exp(A) = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Tr}(A)^{k-1}}{k!} A$$
On est amenés à distinguer deux cas.
Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors $A^2 = 0$ et $\exp(A) = I_n + A$.
Sinon, on a
$$\exp(A) = I_n + \frac{1}{\mathrm{Tr}(A)} \left(e^{\mathrm{Tr}(A)} - 1\right) A$$

   (c) Il existe P telle que $P^{-A}AP = B$ et alors $P^{-1}\exp(A)P = \exp(B)$ (car $\forall k,\ P^{-1}A^kP = B^k$, par exemple par récurrence et l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue car linéaire sur une espace vectoriel de dimension finie).

Planche 55

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. On rappelle que $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n$.

1. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que $\widetilde{P}$ est inversible.

   (b) Montrer que $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$.

   (c) Calculer $\widetilde{\widetilde{P}}$.

   (d) Trouver une relation entre $\widetilde{P}^{-1}$ et $\widetilde{P^{-1}}$.

2. Soient A et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \times \widetilde{A}$.

(b) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\widetilde{B} = P^{-1}\widetilde{A}P$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que A diagonalisable $\implies$ $\widetilde{A}$ diagonalisable.

   (b) La réciproque est-elle vraie ?

Solution 55

1. (a) $\widetilde{P}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{\det(P)}P$ d'après la formule rappelée.

   (b) Comme $\widetilde{P} = \det(P)P^{-1}$, le passage au déterminant donne

$$\det(\widetilde{P}) = \det(P)^n \det(P)^{-1} = \det(P)^{n-1}$$

   (c) On a donc $\widetilde{\widetilde{P}}\widetilde{P} = \det(P)^{n-1}I_n$ et donc

$$\widetilde{\widetilde{P}} = \det(P)^{n-1}(\widetilde{P})^{-1} = \det(P)^{n-2}P$$

2. (a) On a

$$\widetilde{AB} = \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1} = (\det(B)B^{-1})(\det(A)A^{-1}) = \widetilde{B}\widetilde{A}$$

   (b) On en déduit que

$$\widetilde{P^{-1}AP} = \widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{P^{-1}} = (\det(P)P^{-1})\widetilde{A}\det(P^{-1})P = P^{-1}\widetilde{A}P$$

3. (a) Si A est diagonalisable, il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = D$ diagonale. Mais alors

$$P^{-1}\widetilde{A}P = \widetilde{D}$$

   est aussi diagonale (les cofacteurs non diagonaux d'une matrice diagonale sont nuls puisque ce sont des déterminants où une colonne est nulle).

   (b) La réciproque est fausse. En effet, si $n \geq 3$ et $A = E_{1,3}$ alors A est non diagonalisable (non nulle et possédant 0 comme unique valeur propre) alors que $\widetilde{A} = 0$ l'est (à nouveau, tous les cofacteurs sont nuls puisque ce sont des déterminants extraits de taille $n-1$).

Planche 56

On considère E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$. Soient a et b deux vecteurs normés de E formant une famille libre. On définit f qui à x associe $\langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.

2. Déterminer le noyau f.

3. Déterminer les éléments propres de f.

Solution 56

1. f est clairement linéaire de E dans lui même. De plus

$$(f(x)|y) = (a|x)(a|y) + (b|x)(b|y)$$

   Cette expression est symétrique en x et y et vaut aussi $(x|f(y))$. f est donc un endomorphisme symétrique.

2. On remarque que si $x \in \mathrm{Vect}(a,b)^\perp$ alors $f(x)=0$. Réciproquement, si $f(x)=0$ alors comme (a,b) est libre $(a|x)=(b|x)=0$. Ainsi
$$\mathrm{Vect}(a,b)^\perp = \ker(f)$$

3. On a
$$f(a+b) = (1+(a|b))(a+b)$$
$$f(a-b) = (1-(a|b))(a-b)$$
Remarquons que (a,b) étant libre, $|(a,b)| \neq \|a\|\|b\| = 1$. On a donc $1+(a|b)\neq 0$ et $1-(a|b)\neq 0$.
   - Si $(a|b)\neq 0$ alors on a au moins trois valeurs propres différentes qui sont $0, 1+(a|b), 1-(a|b)$. Les sous-espaces propres associés sont de dimensions $n-2$, ≥ 1, ≥ 1. Comme ils sont en somme directe, les inégalités sont des égalités et on a exactement trois valeurs propres.
   - Sinon, on a deux valeurs propres $0, 1$ et deux sous-espaces propres de dimension $n-2$ et ≥ 2. On conclut de même.

Planche 57
Soit E un espace vectoriel et p, q des projecteurs.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $pq = qp = 0$.
2. Dans ce cas, montrer que $\ker(p+q) = \ker(p)\cap\ker(q)$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$.

Solution 57

1. On a $(p+q)^2 = p^2+q^2+pq+qp = p+q+pq+qp$.
   - Si $pq=qp=0$ alors on a immédiatement $(p+q)^2 = p+q$ et $p+q$ est un projecteur.
   - Si $p+q$ est un projecteur, $pq+qp=0$. Ainsi (on compose par p à droite et gauche)
   $$pq+pqp = 0 = pqp+qp$$
   ce qui donne $pq=qp$ puis (comme $pq=-qp$) $pq=qp=0$.

2. Il est immédiat que
$$\ker(p)\cap\ker(q) \subset \ker(p+q)$$
Réciproquement, si $(p+q)(x)=0$ alors $p^2(x)+pq(x)=0$ et comme $pq=0$, $p^2(x)=p(x)=0$. $x\in\ker(p)$ et de même $x\in\ker(q)$.

   Il est immédiat que
$$\mathrm{Im}(p+q)\subset \mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$$
Réciproquement si $a\in\mathrm{Im}(p)$ et $b\in\mathrm{Im}(q)$ alors $p(a)=a$ et $q(b)=b$ mais aussi $q(a)=qp(a)=0$ et $p(b)=pq(b)=0$. Ainsi $a+b=(p+q)(a+b)$. Ceci montre l'inclusion réciproque.

Planche 58
Soit $E=\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et $f\in E$. Soit
$$g : x\mapsto \int_0^1 \inf(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$$
définie sur [0;1].

1. Montrer que g est continue. On pourra visualiser $t \mapsto \inf(x,t)$ sur $[0;1]$ pour déduire une nouvelle expression de g.

2. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$. Exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in [0;1]$.

   On pose :
$$u : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 \inf(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t \right)$$
   définie de E dans E.

3. (a) Montrer que u est linéaire.
   (b) Montrer que u est injective.
   (c) Est-elle surjective ?

4. Donner les vecteurs propres et valeurs propres de u.

Solution 58

1. Le plus simple me semble être de remarquer que
$$g(x) = \int_0^x tf(t)\; dt + x\int_x^1 f(t)\; dt$$
   g est ainsi continue, en particulier car $x \mapsto \int_0^x f$ et $x \mapsto \int_x^1 f$ sont continues (car f est continue donc continue par morceaux).

2. On peut en fait dire que $x \mapsto \int_0^x tf(t)\; dt$ et $x \mapsto \int_1^x f$ sont des primitives de $t \mapsto f(t)$ et de f sur $[0,1]$ (par théorème fondamental avec f continue). Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$g'(x) = xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(t)\; dt = \int_x^1 f(t)\; dt$$
   et donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ avec
$$g''(x) = -f(x)$$

3. (a) La linéarité de u ($u(f_1 + kf_2) = u(f_1) + ku(f_2)$) découle de la linéarité du passage à l'intégrale.
   (b) Si $u(f) = 0$ alors $u(f)'' = 0$ et donc u est affine, du type $x \mapsto ax + b$. De plus, avec l'expression de $u(f)'$, $u(f)'(1) = 0$ et donc $a = 0$. Enfin $u(f)(0) = 0$ et donc $b = 0$. Finalement, $f = 0$ et u est injective.
   (c) u n'est pas surjective de E dans E puisque $\mathrm{Im}(u) \subset \mathcal{C}^2([0;1])$ et il existe des fonctions continues non dérivables (prendre $x \mapsto |x - 1/2|$).

4. u étant injective, 0 n'est pas valeur propre.
   Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre et f un vecteur propre associé. On a alors $u(f) = \lambda f$ et donc $f = \frac{1}{\lambda}u(f)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$. En dérivant deux fois, on obtient
$$\lambda f'' = u(f)'' = -f$$
   On a aussi $0 = u(f)(0) = \lambda f(0)$ et donc $f(0) = 0$ (car $\lambda \neq 0$) et $0 = u(f)'(1) = \lambda f'(1)$ ce qui entraîne de même $f'(1) = 0$.
   La résolution de l'équation amène à distinguer les cas.

- Si $\lambda > 0$, en posant $\omega = \sqrt{1/\lambda}$, il existe des constantes a, b telles que

$$\forall x,\ f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

Comme $f(0) = 0$, $a = 0$. Puis comme $f'(1) = 0$, $b\omega\cos(\omega) = 0$. Si $\omega \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $b = 0$ et f est nulle ce qui est exclus pour un vecteur propre. Il faut donc que $\omega \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et le sous-espace propre associé est inclus dans $x \mapsto \sin(\omega x)$.

- Si $\lambda < 0$, en posant $\omega = \sqrt{-1/\lambda}$, il existe des constantes a, b telles que

$$\forall x,\ f(x) = a\mathrm{ch}(\omega x) + b\mathrm{sh}(\omega x)$$

Comme $f(0) = 0$, $a = 0$. Puis comme $f'(1) = 0$, $b = 0$. f est nulle ce qui est exclus pour un vecteur propre.

A ce niveau, on a

$$\mathrm{Sp}(u) \subset \left\{ \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2},\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

(on peut se limiter à $k \in \mathbb{N}$ car pour $k \in \mathbb{Z}^{-*}$, on retrouve les mêmes valeurs). De plus chaque sous-espace propre est inclus dans une droite vectorielle. La réciproque est une vérification.

Planche 59

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ une fonction non constante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette fonction vérifie $\forall\ (A, B) \in M_n(\mathbb{C}),\ f(AB)\ = f(A)f(B)$.

1. (a) Calculer $f(I_n)$
   (b) Calculer $f(0)$.
2. Montrer que A inversible $\Rightarrow f(A) \neq 0$.
3. Montrer que si A *et* B sont semblables alors $f(A) = f(B)$
4. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant r \leqslant n-1$. On suppose A de rang r.
   (a) Montrer que si $f(A) \neq 0$ alors $f(B) \neq 0$ pour toute matrice B telle que $\mathrm{rg}(B) = r$.
   (b) Montrer que si $f(A) \neq 0$ alors $f(B) \neq 0$ pour toute matrice B telle que $1 \leq \mathrm{rg}(B) \leqslant r$.
5. Prouver la réciproque de la question 2.

Solution 59

1. (a) $I_n^2 = I_n$ et donc $f(I_n)^2 = f(I_n)$ ce qui entraîne $f(I_n) = 0$ ou $f(I_n) = 1$. Le premier cas est exclus car on aurait alors $f(A) = f(AI_n) = f(A)f(I_n) = 0$ pour tout A et f serait constante. Ainsi
$$f(I_n) = 1$$
   (b) Pour tout A, $f(0) = f(0A) = f(0)f(A)$. Comme f n'est pas constante, $f(0) = 0$.
2. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $1 = f(I_n) = f(AA^{-1}) = f(A)f(A^{-1})$ et donc $f(A) \neq 0$.
3. Si A et B sont semblables alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BQ$. Ainsi, $f(A) = f(P)f(B)f(P^{-1})$. Comme $I_n = PP^{-1}$, on a $f(P)f(P^{-1}) = f(I_n) = 1$ et donc $f(A) = f(B)$.
4. (a) Si A et B ont le même rang, il existe des matrices inversibles P et Q telles que $PAQ = B$. On a $f(B) = f(P)f(A)f(Q)$ et avec la question 1, $f(A)$ est nul si et seulement si $f(B)$ l'est.

(b) Si $f(A) \neq 0$ alors $f(M) \neq 0$ pour toute matrice de rang r. Soit $p \in [\![1, r]\!]$; on peut écrire la matrice J_p (matrice diagonale avec les p premiers coefficients valant 1 et les autres nuls) comme produit de matrices de rang r : il suffit de considérer toutes les matrices M obtenues à partir de J_p en ajoutant $r-p$ coefficients 1 sur la diagonale. $f(J_p)$ est alors le produit des $f(M)$ et est non nul. On a une matrice de rang p d'image non nulle et donc toutes les matrices de rang p ont une image non nulle.

5. On peut de même écrire 0 comme produit de matrices de rang $n-1$ (matrices avec $n-1$ coefficients valant 1 sur la diagonale et les autres nuls et on considère les n matrices possibles). Si les matrices de rang $n-1$ ont une image non nulle, il en est de même pour 0 et c'est contradictoire.
Ainsi, toutes les matrices de rang $\leq n-1$ ont une image nulle comme ci-dessus et $f(A) = 0$ quand A est de rang $\leq n-1$ c'est à dire non inversible.

Planche 60
Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant : (réduction)

$$\begin{cases} x' &= 4x + 6y \\ y' &= -3x - 6y \\ z' &= -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

Solution 60
Le système s'écrit matriciellement $U' = AU$ où $U = (x, y, z)$ (matrice colonne) et $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.
En développant par rappport à la dernière colonne, on trouve

$$\chi_A = (X+5)(X^2 + 2X - 6)$$

A possède donc les valeurs propres $-5, -5-2\sqrt{7}, -5+2\sqrt{7}$. En notant U_1, U_2, U_2 des vecteurs propres associés les fonctions

$$x \mapsto e^{-5x} U_1,\ x \mapsto e^{-5-2\sqrt{7}} U_2,\ x \mapsto e^{-5+2\sqrt{7}} U_3$$

forment une base des solutions du système. Une résolution de système donne

$$U_1 = (0,0,1),\ U_2 = (-5-2\sqrt{7}, \frac{11+5\sqrt{7}}{6}, 1),\ U_3 = (-5+2\sqrt{7}, \frac{11-5\sqrt{7}}{6}, 1)$$

Planche 61
Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle ., . \rangle$. On note $\|.\|$ la norme associée. On dit qu'une suite (x_n) converge fortement vers x si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ et (x_n) converge faiblement vers x si $\forall y \in E,\ \lim_{n\to\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$

1. (a) Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
   (b) Montrer que convergence forte implique convergence faible
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers $x \iff (x_n)$ converge faiblement vers x et $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$
3. Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Solution 61

1. (a) Supposons que (x_n) converge faiblement vers a et b. On a pour tout y

$$\langle x_n - a, y\rangle - \langle x_n - b, y\rangle = \langle b - a, y\rangle$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. C'est en particulier vrai pour $y = b-a$ et ainsi $\|b-a\|^2 = 0$ et donc $a = b$. Il y a unicité si existence de la limite faible.

   (b) Supposons $\|x_n - x\| \to 0$. Pour tout y, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|.\|y\| \to 0$$

On a donc aussi convergence faible de (x_n) vers x.

2. Le sens direct découle de la question précédente et de la continuité de la norme.

   On suppose réciproquement que $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$ pour tout y et $\|x_n\| \to \|x\|$. On a

$$\langle x_n, x\rangle - \langle x, x\rangle = \langle x_n - x, x\rangle \to 0$$

et ainsi

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x\rangle - \|x_n\|^2 + \langle x, x_n\rangle \to 0 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 0$$

On a donc convergence forte de (x_n) vers x.

3. On doit montrer qu'en dimension finie, la convergence faible entraîne la convergence forte. On note $(e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée et on suppose que (x_n) converge faiblement vers x. Comme on a choisi une bo.n., on a

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{d} \langle x_n, e_k\rangle^2$$

De plus $\langle x_n, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle \langle x_n - x, e_k\rangle \to 0$ par convergence faible. Ainsi, $\|x_n\|^2 \to \|x\|^2$ et on conclut avec la question précédente.

Planche 62

Soit σ une permutation aléatoire de $[\![1, n]\!]$. On note X_k la variable aléatoire valant 1 si $\sigma(k) = k$ et 0 sinon. On note N le nombre de points fixes de σ.

1. (a) Que peut-on dire des X_k ?
   (b) Déterminer espérance et variance de X_k.
   (c) Calculer $\text{cov}(X_i, X_j)$.
2. (a) Lier N et les X_k?
   (b) Calculer espérance et variance de N.

Solution 62

1. Les X_k sont des variables de Bernoulli. Il y a $(n-1)!$ permutations telles que $\sigma(k) = k$. Les permutations, en nombre $n!$, étant équiprobable, le paramètre de la loi deBernoulli est égal à $\frac{1}{n}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n},\ \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$$

Par formule de Huygens, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$. X_iX_j est encore une variable de Bernoulli. Son paramètre est égal à $\frac{\alpha_{i,j}}{n!}$ où $\alpha_{i,j}$ est le nombre de permutations laissant fixes i et j. Si $i \neq j$, $\alpha_{i,j} = (n-2)!$. Ainsi

$$\forall i \neq j,\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

On a bien sûr

$$\forall i,\ \mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i) = \frac{n-1}{n^2}$$

2. On a bien sûr

$$N = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = 1$$

On a aussi

$$\mathbb{V}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{n-1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{2n-1}{n^2}$$

Planche 63

1. Montrer que $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est orthogonale. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que A est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

2. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que 2 des 3 assertions suivantes impliquent la troisième :

   (i) $f^2 = -\mathrm{Id}$.

   (ii) f est une isométrie.

   (iii) $\forall x \in E, (x|f(x)) = 0$.

Solution 63

1. Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et A est donc une matrice orthogonale. En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes, on a $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ et $A \in O_3^-(\mathbb{R})$.
   Par ailleurs, A est symétrique réelle et donc diagonalisable.
   Comme A est orthogonale, ses valeurs propres réelles sont 1 et -1. Comme son déterminant est négatif et $A \neq -I_3$, 1 est valeur propre double et -1 valeur propre simple et le polynôme minimal vaut $(X-1)(X+1)$ (puisque A est diagonalisable).

2. On a trois implications à justifier. Notons que (ii) peut se lire f préserve le produit scalaire.

   - Supposons (i) et (ii) vraies. On a alors

   $$\forall x,\ (x|f(x)) = (f(x)|f(f(x))) = (f(x)|-x) = -(x|f(x))$$

   et (iii) est vérifiée.

- Supposons (i) et (iii) vraies. On a alors
$$\forall(x,y),\ 0=(x+y|f(x+y))=(x|f(y))+(y|f(x)).$$
Soient x et y dans E.
$$(f(x)|f(y))=-(f(x)|-f(y))$$
et par (i), $-f=f^{-1}$, donc
$$(f(x)|f(y))=-(f(x)|f^{-1}(y)).$$
Avec ce qui précède,
$$(f(x)|f(y))=(x|f(f^{-1}(y)))=(x|y).$$
On a bien montré que f conserve le produit scalaire.
- Supposons (ii) et (iii) vraies.
Soient x et y dans E. On a, par (ii),
$$((f(x)|f(y)=(x|y)$$
et donc, avec (iii)
$$(x|y)=-(x|f^2(y)).$$
Finalement, pour tout $x\in E$, $(x|y+f^2(y))=0$. D'où $y+f^2(y)=0$. Comme ceci est vrai pour tout y, on a bien $f^2=-\mathrm{Id}$.

Planche 64

1. Donner l'expression de la dérivée de $f\ :\ x\longmapsto\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.
2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0,\infty[\ :\ x(x+2)y'+(x+1)y-1=0$.
3. Déterminer les solutions développables en série entière sur $]-2,2[$.
4. Résoudre (E) sur $[0,+\infty[$.

Solution 64

1. La fonction proposée est définie et de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ et le calcul donne $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ comme dérivée.
2. On a une EDL1 à coefficients continus sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le coefficient devant y' qui ne s'annule pas. Le cours s'applique et l'ensemble des solutions est une droite affine dirigée par $x\mapsto e^{-A(x)}$ où A est une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x\mapsto\frac{x+1}{x(x+2)}$. On a
$$\frac{x+1}{x(x+2)}=\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{2x}$$
et on peut choisir $A(x)=\ln(\sqrt{x(x+2)})$. L'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation homogène est donc $\mathrm{Vect}(x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x(x+2)}})$.
En notant $y_0\ :\ x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x(x+2)}}$, la méthode de variation de la constante stipule que pour cy_0 soit solution de (E) sur $]0,+\infty[$, il suffit que
$$\forall x>0,\ x(x+2)y_0(x)c'(x)=1$$

c'est à dire que

$$\forall x > 0,\ c'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}}$$

A l'aide de la première question, il suffit de choisir $c(x) = \ln((x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - 1}) = \ln(x + 1 + \sqrt{x(x+2)})$. Finalement, la solution générale sur $]0, +\infty[$ est

$$y_c\ :\ x \mapsto \frac{c + \ln(x + 1 + \sqrt{x(x+2)})}{\sqrt{x(x+2)}}$$

3. On raisonne par analyse et synthèse.
Supposons que y soit solution DSE sur $]-2, 2[$. Il existe alors une suite (a_n) telle que

$$\forall x \in]-2, 2[,\ y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Comme on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on en déduit que

$$\begin{aligned} x^2 y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n \\ 2xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n \\ xy(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\ y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

En injectant ceci dans l'équation,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((2n+1)a_n + n a_{n-1}) x^n = 1$$

Comme ceci est vrai sur $]-2, 2[$, l'unicité du DSE de 1 donne

$$a_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = -\frac{n}{2n+1} a_{n-1}$$

Une récurrence donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{(-1)^n 2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Réciproquement, choisissons (a_n) ainsi. Si $r > 0$, $\frac{|a_{n+1} r^{n+1}|}{|a_n r^n|} = \frac{n}{2n+1} r \to \frac{r}{2}$. Par règle de D'Alembert, $\sum (a_n r^n)$ converge absolument si $r < 2$ et diverge grossièrement si $r > 2$. La série entière associée est de rayon 2. Par construction, sa somme est solution de (E) sur $]-2, 2[$.

Il y a ainsi une unique solution DSE sur $]-2, 2[$: c'est la fonction f définie par

$$\forall x \in]-2, 2[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$$

4. Supposons y solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$. C'est une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ et il existe $c > 0$ tel que
$$\forall x > 0,\ y(x) = \frac{c + \ln(x + 1 + \sqrt{x(x+2)})}{\sqrt{x(x+2)}}$$
y est de plus dérivable en 0 et on a $y(0) = 1$ (faire $x = 0$ dans l'équation).

Ici commence une partie fort calculatoire. On peut aussi voir plus loin pour une alternative plus théorique.
Remarquons que (au voisinage de 0)
$$\sqrt{x(x+2)} = \sqrt{2x}(1 + x/2)^{1/2} = \sqrt{2x} + \frac{\sqrt{2}x^{3/2}}{4} + o(x^{3/2})$$
$$\begin{aligned}
\ln(x + 1 + \sqrt{2x + x^2}) &= \ln(1 + \sqrt{2x} + x + \frac{\sqrt{2}x^{3/2}}{4} + o(x^{3/2})) \\
&= \sqrt{2x} + x + \frac{\sqrt{2}x^{3/2}}{4} - \frac{1}{2}(2x + 2\sqrt{2}x^{3/2}) + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2}) \\
&= \sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{12}x^{3/2} + o(x^{3/2})
\end{aligned}$$
$$\frac{\ln(x + 1 + \sqrt{x(x+2)})}{\sqrt{x(x+2)}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}(1 + x/2)^{-1/2}(\sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{12}x^{3/2} + o(x^{3/2}))$$
Or, $(1 + x/2)^{-1/2} = 1 - x/4 + o(x)$ et finalement
$$\frac{c + \ln(x + 1 + \sqrt{x(x+2)})}{\sqrt{x(x+2)}} = 1 - \frac{x}{3} + o(x)$$
La condition de continuité en 0 de y impose alors $c = 0$ et. pour cette valeur, l'existence d'un DL à l'ordre 1 donne la dérivabilité en 0. On a donc une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ qui est
$$x \mapsto \frac{\ln(x + 1 + \sqrt{x(x+2)})}{\sqrt{x(x+2)}}$$

Ici commence l'alternative.
Le même raisonnement par analyse mais poussé moins loin montre facilement que $c = 0$ est une condition nécessaire. Il y a donc au plus une solution y sur $[0, +\infty[$.
Or, on sait qu'il ya une solution sur $]-2, 2[$ et donc une solution sur $[0, 2[$. Le même calcul montre que cette dernière est restriction de y.
Notre y est donc à coup sûr dérivable en 0 et c'est bien une solution sur $[0, +\infty[$.

Planche 65
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Pour $t \in]0, 1[$, écrire $\dfrac{t^{a-1}}{1 + t^b}$ comme somme de série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\, dt$. Que peut-on en déduire ?

3. Soit $S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(t)$. Démontrer $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.
5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Solution 65

1. Si $t \in]0,1[$ alors $t^b \in]0,1[$. D'après la formule d'une somme géométrique, on a donc
$$\frac{t^{a-1}}{1+t^{b-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{a-1+kb}$$
2. On a immédiatement
$$\int_0^1 |u_n(t)|\, dt = \frac{1}{a+nb}$$
C'est le terme général d'une série divergente. On ne peut pas utiliser le théorème d'interversion terme à terme.
3. On a
$$S_N(t) = t^{a-1}\frac{1-(-t^b)^{N+1}}{1+t^b} = \frac{t^{a-1}}{1+t^b} + (-1)^N \frac{t^{a-1+(N+1)b}}{1+t^b}$$
On en déduit (les intégrales écrits existent car $a > 0$ et $b > 0$) que
$$\int_0^1 S_N(t)\, dt - \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, dt = (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{a-1+(N+1)b}}{1+t^b}\, dt$$
et donc
$$\left|\int_0^1 S_N(t)\, dt - \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, dt\right| \le \int_0^1 t^{a-1+(N+1)b}\, dt = \frac{1}{a+(N+1)b} \to 0$$
ce qui donne le résultat voulu.
4. Par linéarité du passage à l'intégrale,
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, dt = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \int_0^1 u_k(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$
5. Pour $a = 1$ et $b = 3$, on trouve
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, dt$$
Une décomposition en éléments simples donne
$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{1}{3}\frac{t-2}{t^2-t+1}$$
En écrivant $t - 2 = \frac{1}{2}(2t-1) - \frac{3}{2}$, on sait alors calculer une primitive de ce terme (apparissent deux logaritmes et un arctan). Un calcul fastidieux mais sans difficulté majeure donne alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln(2)}{3}$$

Planche 66

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ L'objectif de cet exercice est d'exprimer f avec deux méthodes différentes.

1. Déterminer D le domaine de définition de f.
2. Méthode 1 :
   (a) Décomposer $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$ en éléments simples.
   (b) En déduire une expression de f sur D.
3. Méthode 2:
   (a) Calculer f' et f''.
   (b) Donner une expression de f'' puis de f' sur $]-1,1[$.
   (c) Conclure.

Solution 66

1. $\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ est borné si $|x| < 1$ et non borné si $|x| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1.
   De plus $\left|\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ montre qu'il y a convergence normale sur $[-1,1]$.
   Finalement, $D = [-1,1]$ et f est continue sur D.
2. On a
   $$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{4}{2x+1} + \frac{1}{x+1}$$
   On en déduit que pour $|x| < 1$ (afin que les trois sommes écrites existent)
   $$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} \\ &= -x^2 \ln(1-x^2) - 4x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-\ln(1-x^2) - x^2) \end{aligned}$$
   Notons $h(x)$ la somme du milieu. Comme on peut dériver une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, on a
   $$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$
   Comme $h(0) = 0$, on en déduit que
   $$h(x) = -x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
   On trouve finalement que
   $$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = -(x^2+1)\ln(1-x^2) - x^2 + 4x^2 - 2x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
   ou encore
   $$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = 3x^2 - (x-1)^2 \ln(1-x) - (x+1)^2 \ln(1+x)$$
   La valeur en ± 1 s'obtient en passant à la limite (f est continue) et vaut 3.

3. On peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence pour obtenir

$$f'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$$

$$f''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -2\ln(1-x^2)$$

On primitive et en tenant compte de $f'(0) = 0$, on obtient (écrire $\ln(1-x^2) = \ln(1-x)+\ln(1+x)$ pour se ramener à des fonctions de primitive connue à partir de celle de ln)

$$f'(x) = 4x - 2x\ln(1-x^2) + 2\ln(1-x) - 2\ln(x+1)$$

ou encore

$$f'(x) = 4x + 2(1-x)\ln(1-x) - 2(1+x)\ln(1+x)$$

f étant nulle en 0, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$. Une intégration par parties donne

$$f(x) = 2x^2 + \left[-(1-t)^2\ln(1-t) - (1+x)^2\ln(1+t)\right]_0^x - \int_0^x ((1-t)-(1+t))\,dt$$

et donc

$$f(x) = 3x^2 - (x-1)^2\ln(1-x) - (x+1)^2\ln(1+x)$$