CCINP

Planche 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)\text{ch}(x)$.

1. Sans le calculer, justifier l'existence du développement en série entière de f en 0. Donner son rayon de convergence.
2. On note $\sum a_n x^n$ ce développement. Calculer a_0 et montrer que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
3. Calculer $f^{(4)}$ et en déduire une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 vérifiée par f.
4. Trouver une relation de récurrence sur les a_n.

Planche 2
Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt$.

1. Quel est le domaine de définition D de F ?
2. Calculer $F(1)$ en posant $u = \frac{1}{t}$.
3. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in D$.

Planche 3
Soit u un endomorphisme symétrique dans une espace euclidien.

1. Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)^\perp$ et ensuite que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)^\perp$.
2. On pose
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.
   (a) Trouver une base de l'image et du noyau de f.
   (b) Trouver la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, du projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$.

Planche 4
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u.

1. Démontrer, sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, que $P(u) = 0$ où P est le polynôme caractéristique de u.
2. Soit $x \in E$. On écrit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$.
3. Démontrer que les valeurs propres de u sont simples si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

Planche 5
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose $N : E \to \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,dt}$. On note aussi $\|.\|_\infty$, $f \mapsto \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On sait que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.

1. Montrer que N est une norme issue d'un produit scalaire à préciser.
2. N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
   On pourra utiliser que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$.

Planche 6
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$. On suppose que $A^T = -A$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
2. Montrer que $\det(A) = 0$ et que le spectre de f est $\{0\}$.
3. Montrer que $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.
4. Montrer que $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est orthogonale et que $\det(B) = 1$.

Planche 7
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
2. On pose $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid DM = MD\}$.
   (b) Déterminer $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Vect}\big((A^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ est strictement inclus dans $\mathcal{C}(A)$.

Planche 8
Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien. Soit u un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit p un entier impair.
   (a) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique v de E tel que $v^p = u$.
   (b) Montrer que v admet les mêmes sous-espaces propres que u et que v et u ont le même nombre de valeurs propres.
   (c) Montrer que v est unique.
2. Cette fois-ci p est pair. Les conclusions de la question précédente sont-elles conservées ?

Planche 9
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient f, u, v des endomorphismes de E. On suppose qu'il existe λ et μ réels tels que

$$f = \lambda u + \mu v, \quad f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v \quad \text{et} \quad f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v.$$

1. Donner des caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable utilisant des polynômes.
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Montrer que u et v sont diagonalisables dans une base commune lorsque λ, μ et 0 sont deux à deux distincts.

Planche 10
Pour α et x réels, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} x^n$.

1. Etudier la convergence simple de $\sum (u_n)_{n \geq 1}$ en fonction de la valeur de α.
   On note D_α le domaine de convergence simple et S_α la somme.
2. Etudier la convergence normale sur D_α.
3. Etudier la continuité de S_α sur D_α.

Planche 11

1. Calculer $\int_a^b \frac{1}{t^{3/2}+t^{1/2}}\, dt$ pour $0 < a < b$. Indication : poser $u = \sqrt{t}$.
2. Prouver l'existence de
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}+k^{1/2}}$$
3. Montrer que
$$2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq R_n \leq 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
4. Donner un équivalent de R_n.

Planche 12
Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
On note a_n le nombre de bijections de E dans E sans point fixe. On pose $a_0 = 1$.

1. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.
2. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $|x| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ converge. On note alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
3. Pour $|x| < R$, calculer $e^x f(x)$.
4. En déduire une expression de a_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Dans une classe avec n élèves, un professeur rend les copies à ses élèves de manière aléatoire.
   On note l'événement D_n : "Aucun élève ne reçoit sa copie". Calculer la probabilité $\mathbb{P}(D_n)$.

Planche 13
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n /\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

Calculer $d(e_1, H)$.

Planche 14
Déterminer la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite d'équation $6x = 4y = 3z$.

Planche 15
Pour $x \geq 0$, on pose

$$I(x) = \int_0^x \frac{t\sin(t)}{1+t^2}\, dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_0^x \left|\frac{t\sin(t)}{1+t^2}\right|\, dt$$

1. Montrer que I admet une limite finie en $+\infty$.
2. Montrer que
$$J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (u+k\pi)\frac{\sin(u)}{1+(u+k\pi)^2}\, du$$
3. J admet-elle une limite en $+\infty$?

Planche 16
Soit E un espace vectoriel normé.

1. Montrer que si A est un sev de E alors $\bar{A}$ est un sev de E.
2. Montrer qu'un hyperplan de E est soit fermé soit dense dans E.
3. Montrer que si K est un compact de E, alors il est fermé et borné.
4. On note $\ell^1(\mathbb{R})$ les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et on pose
$$\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$
   (a) Vérifier que $\|.\|$ est une norme sur $\ell^1(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang est un sev de $\ell^1(\mathbb{R})$.
   (c) $\bar{B}(0,1)$ est-elle compacte dans $\ell^1(\mathbb{R})$?

Planche 17
Soit $f\ :\ x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$.

1. Etudier f
2. Trouver le développement en série entière de f à l'origine.
3. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Planche 18

1. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'une solution $a_n \in [0,1]$ à l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$.
   (b) Montrer que $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et en déduire limite et équivalent de a_n.
2. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = a_n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition D de S.
   (b) Etudier la continuité de S sur D.

Planche 19
On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y^{(0)} = 0$$

où $y \in E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. On pose

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k,\ u\ :\ f \in E \mapsto f',\ e^{\lambda(.)}\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda x}\ (\lambda \in \mathbb{C})\}$$

$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

1. Montrer que
$$\forall Q \in \mathbb{C}[X],\ \forall f \in E,\ Q(u)(f.e^{\lambda(.)}) = e^{\lambda(.)}Q(u + \lambda \mathrm{Id}_E)(f)$$
2. (a) Montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les racines de P de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$,
$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{k=1}^{s} \ker((u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k})$$
   (b) Soit $f \in E$. Montrer que $g = f.e^{\lambda_k(.)} \in \ker((u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k})$ si et seulement si f est un polynôme de degré $\leq \alpha_k - 1$.
   (c) En déduire $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.
3. Application : résoudre $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Planche 20
Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. On rappelle qu'un endomorphisme τ est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau^{k-1} \neq 0$ et $\tau^k = 0$. On considère un endomorphisme u nilpotent.

1. Montrer que $\chi_u = X^n$.
2. Soit $v \in GL(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. On pose $f = u + v$. Montrer que f et v ont même spectre.
3. On pose $w = v^{-1} \circ u$. Montrer que w est nilpotent.
4. En déduire que $\det(f) = \det(v)$.

Planche 21
Soit n un entier supérieur à 1 et $I = [\![1, n+1]\!]$.
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.
Pour tous $i, j \in I$, on suppose que, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$.

1. Calculer λ.
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y. Les 2 variables sont-elles indépendantes?
3. Déterminer la loi de $Z = X - 1$ et en déduire l'espérance et la variance de X.
4. On pose la matrice B d'ordre $n+1$ tel que $B = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = \mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$. Calculer les puissances de B. B est-elle diagonalisable ?

Planche 22
On considère les fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1[$. Y-a-t-il convergence uniforme ?
2. Etudier les convergence simple, uniforme et normale de $\sum(f_n)$.

Planche 23
On prend A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On suppose A non nulle et vérifiant $A^3 + A = 0$.

1. (a) Montrer que $\ker(u) \neq \{0\}$.
   (b) Montrer que $\ker(u) \oplus \ker(u^2 + \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$ et que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Déterminer les éléments qui commutent avec A' et en donner une base.
3. Déterminer les solutions de $X^6 + X^2 = 0$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Planche 24
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance finie.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq j)$.

   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et suivant la même loi que X. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$.
2. Exprimer $\mathbb{P}(M_n \leq k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \leq k)$.
3. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la loi uniforme sur $\mathbb{N}_k = [\![1, k]\!]$ avec $k > 1$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et sa limite quand $n \to +\infty$.
4. On suppose que $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ X_i \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in \,]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(M_n)$.
   (b) Trouver la loi de $m_n = \min\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$.
   (c) En utilisant m_2, en déduire $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$.

Planche 25
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique ($(M \mid N) = \mathrm{Tr}\left({}^tNM\right)$).

1. Montrer que deux matrices semblables n'ont pas forcément la même norme.

   On pourra prendre un contre exemple pour $n = 2$.

2. Soit P une matrice de taille n et a un réel tels que aP soit orthogonale.

   Vérifier dans un premier temps que P est inversible et que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|P^{-1}MP\| = \|M\|$$

3. (a) Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ le vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ses coefficients sont tous nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1).
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.

   (b) En déduire que, si P est une matrice inversible vérifiant

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|P^{-1}MP\| = \|M\|$$

   alors il existe a un réel tel que aP soit orthogonale.

Planche 26
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, distincts, et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit u sur $\mathbb{R}_n[X]$ par
$u(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que u est diagonalisable et donner ses sous-espaces propres.

Planche 27
Soit n un entier non nul et p entier compris entre 0 et n. On note $N(n, p)$ le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ayant exactement p points fixes, $D(n) = N(n, 0)$ et $D(0) = 1$.
On définit : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{D(n)}{n!} x^n$.

1. Par un raisonnement de dénombrement montrer que : $N(n, p) = \binom{n}{p} D(n-p)$ et $\sum\limits_{p=0}^{n} N(n, p) = n!$.

2. Justifier que f est définie sur $]-1, 1[$ puis montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x)e^x = \dfrac{1}{1-x}$.

3. En déduire une expression de $N(n, p)$ et de $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{D(n)}{n!}$.

Planche 28
Soit a, b des réels distincts. On considère $E = \mathbb{R}^n$ et f, p, q des endomorphismes de E vérifiant :
• $p \neq 0$ et $q \neq 0$; • $p + q = \mathrm{Id}_E$; • $f = ap + bq$; • $f^2 = a^2p + b^2q$.

1. Calculer $(f - a\mathrm{Id}_E)(f - b\mathrm{Id}_E)$. En déduire que f est diagonalisable.

2. Montrer que p et q sont des projecteurs et que $pq = qp = 0$.

3. (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.

   (b) On suppose $ab \neq 0$. Montrer que f est bijective.

4. Montrer que p est la projection sur $E_a(f)$ parallèlement à $E_b(f)$ et que q est la projection sur $E_b(f)$ parallèlement à $E_a(f)$.

Planche 29
On considère E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 = u$.

1. Montrer que u est diagonalisable et discuter du nombre p de valeurs propres de u.
2. Soit F un sous espace vectoriel de E.

   Montrer que u stabilise F si et seulement si il existe des sous espaces $F_1, \dots, F_p$ tels que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ et que pour $i \in [\![1, p]\!]$, F_i est sous espace de $E_{\lambda_i}(u)$.

Planche 30
Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ non nuls. On pose $M = \begin{pmatrix} x^2 & yx & zx \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice ligne L telle que $M = {}^tLL$.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.
3. Montrer que si M n'est pas diagonalisable, alors elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer M^p.

Planche 31
On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Situer les racines réelles de $X^3 - X - 1$.
2. Que valent $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_A(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \chi_A(x)$ et $\chi_A(0)$?
3. On suppose que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Planche 32
Posons
$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Arctan}(x \tan(t)) dt$$

1. Montrer que $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.
2. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et donner une expression de $F'(x)$ sans $\int$ grâce au changement de variable $u = x \tan(t)$.
5. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{\pi^2}{4}$.
6. Montrer qu'en fait $F(x) \longrightarrow \frac{\pi^2}{4}$ pour $x \longrightarrow +\infty$.

Planche 33
Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $F_f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-itx)dt$.

1. On considère la fonction $g : t \mapsto \exp(-|t|)$. Justifier que F_g est définie sur $\mathbb{R}$, et calculer sa valeur pour tout réel x.

2. Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. On suppose de plus qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)|dt$ converge. Pour tout entier k, on pose $h_k : t \mapsto (-it)^k f(t)$.
   Justifier que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, F_{h_k} est définie sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, F_f admet une dérivée d'ordre k et que $F_f^{(k)} = F_{h_k}$.

Planche 34

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ sur $]0, 1]$.

2. On pose $u_n(x) = x^{2n}(\ln x)^2$ pour n entier et $x \in]0, 1]$. Pour n entier, montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0, 1]$ et calculer $\int_0^1 u_n(x)dx$.

3. Déterminer une écriture de $I = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx$ sous forme de somme.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

Planche 35
On considère $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle ., . \rangle$, un produit scalaire quelconque. Soit f un endomorphisme symétrique à valeurs propres > 0.

1. Montrer que pour tout $h \neq 0$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, $\langle f(h), h \rangle > 0$.

2. Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ fixé défini par $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$.
   (a) Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle.
   (b) À l'aide des questions précédentes, montrer que g admet un point critique unique z_0 tel que $z_0 = f^{-1}(u)$.
   (c) Montrer que g admet en z_0 un minimum global.

Planche 36
Soit $p \in]0, 1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U\,{}^tU$.

1. (a) Si $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de probabilité de X_k^2.
   (b) Calculer ${}^tUU$ en fonction de S.
   (c) Calculer M^2 en fonction de M et S. Donner un polynôme annulateur de M. La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de son spectre ?

2. (a) Déterminer les coefficients de M.
   (b) Déterminer la loi de $\mathrm{Tr}(M)$, donner son espérance et sa variance.
   (c) Donner les valeurs possibles de $\mathrm{rg}(M)$. Donner sa loi de probabilité.

3. Donner la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes.

Planche 37

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de f.
3. Rappeler le lemme des noyaux. En déduire deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ en somme directe et stables par f. On note F celui de dimension 1 et G celui de dimension 2.
4. Soit (u_1) une base de F et une base (u_2, u_3) de G. On pose d l'endomorphisme tel que
$$d(u_1) = -u_1,\ d(u_2) = u_2,\ d(u_3) = u_3$$
   (a) Montrer que f et d commutent.
   (b) On pose $n = f - d$. Calculer n^2 et montrer que n est nilpotent. Montrer que n et d commutent.
   (c) Exprimer f^k pour $k \geq 1$ en fonction de n et d.

Planche 38

1. On pose :
$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases} \end{array}.$$
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n+1}\mathrm{d}x$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n+1}\mathrm{d}x$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
   (b) Trouver I_n en fonction de n, puis en déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Planche 39

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. En déduire que f est croissante.
2. Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $f(nx) = nf(x))$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(x) = x$.
4. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Planche 40
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice représentative A, nilpotent d'indice de nilpotence p, c'est-à-dire tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ soit libre
2. Que peut on en déduire sur p ?
3. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit semblable à $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $p = 2$. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Planche 41
On note $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} \, \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que g est définie sur $]1, +\infty[$.
2. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.
3. Calculer la limite de g en $+\infty$ et expliciter g sur $]1, +\infty[$.

Planche 42
On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n strictement positive. Soit u un endomorphisme symétrique de E. Soit p un entier naturel impair.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique v de E, tel que $v^p = u$. (Penser à considérer une matrice de u)
2. Montrer que u et v ont les même espaces propres et qu'ils ont le même nombre de valeurs propres.
3. v est-il unique ?
4. Maintenant on considère p entier naturel non nul pair et $v \in S(E)$ tel que $v^p = u$
   (a) Que dire de l'existence de v ?
   (b) Si le spectre de u est inclus dans $\mathbb{R}^+$, que dire de v ?
   (c) Si de plus le spectre de v est inclus dans $\mathbb{R}^+$ que conclure ?

Planche 43
Soit E un espace préhilbertien réel, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que : $\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2$. On pose $F = \mathrm{Vect}((e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$.

1. Déterminer l'orthogonal de F. Que peut-on en déduire sur $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$? sur E ?
2. Soit $u : x \mapsto x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.
   (a) Justifier que u est symétrique.
   (b) Montrer que $\forall x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0$.
   (c) En déduire que $\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Planche 44
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Si u endomorphisme de E, on dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Un tel x est alors appelé $u-$générateur.

1. Soit u endomorphisme cyclique. Ecrire la matrice de u dans la base associée à un $u-$ générateur. Montrer que $\pi_u = \chi_u$ (π_u est le polynôme minimal).

2. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer l'équivalence suivante: u est cyclique si et seulement si u est nilpotent d'indice n.

3. Soit u un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que u est cyclique. Indication: on pose $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs propres associés aux$n$ valeurs propres distinctes. On pourra montrer que x est $u-$générateur.

Planche 45

1. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ toutes deux diagonalisables telles que $\chi_M = \chi_N$. Montrer que $\exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $M = AB$ et $N = BA$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Montrer que n est pair.

Planche 46
On définit une suite de fonctions: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0,\ f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x}$. On note : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

4. Donner un équivalent de f en 0.

Planche 47
Soit P un polynôme réel scindé à racines simples

1. Montrer que P' est constant ou scindé à racines simples. On pourra utiliser un théorème de Rolle

2. Montrer que P et P' sont premiers entre eux

3. Montrer que il existe U, V dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $X = XU(X)P(X) + XV(X)P'(X)$.

Planche 48
On pose $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. Soit P dans $\mathbb{R}_3[X]$. On étudie la divison euclidienne $AP = BQ + R$ avec Q dans $\mathbb{R}[X]$ et R dans $\mathbb{R}_3[X]$. On pose Φ l'application qui à P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe son reste par la division euclidienne R.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme.

2. Calculer l'image et le noyau de Φ

3. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner ses éléments propres. Φ est-il diagonalisable ?

Planche 49

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$. On pourra considérer la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Etudier la monotonie de (u_n) et sa limite.
3. On pose $v_n = n + \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'intégrale.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Planche 50
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = x(1 + n^\alpha\,\mathrm{e}^{-nx})$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme ?
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x$.

Planche 51
On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des complexes. On suppose que A représente un endomorphisme f d'un espace E de dimension n.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
2. On suppose désormais que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
   (a) Préciser $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Montrer que $E = \ker(f) \bigoplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$
3. Montrer que λ est valeur propre de f ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a_n\lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.
4. Etudier la diagonalisabilité de f.

Planche 52
Les 2 questions sont indépendantes.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap O(n)$ (matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et orthogonales)
2. On admet que $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire dans $M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Prouver que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux pour ce produit scalaire.
   (b) Soit $A = (a_{i,j})$ fixéé. Calculer
$$\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$$

Planche 53
On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément p jetons dans l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le plus grand numéro tiré et Y celle donnant le plus petit.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}$.
2. (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) En déduire que, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \dfrac{(n-p)!k!p}{n!(k-p)!k}$.
   (c) Calculer l'espérance de X.
3. (a) Donner la loi de Y.
   (b) Montrer que $E(X) = pE(Y)$.

Planche 54

1. Dans cette question uniquement, A est la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1. Calculer A^2 puis trouver A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   A est-elle diagonalisable ? Trouver une matrice diagonale semblable à A.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1.
   (a) Montrer que A est semblable à une matrice du type $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. En déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
   (b) En déduire une expression de $\exp(A)$.
   (c) Trouver une relation entre $\exp(A)$ et $\exp(B)$.

Planche 55
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. On rappelle que $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n$.

1. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\widetilde{P}$ est inversible.
   (b) Montrer que $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$.
   (c) Calculer $\widetilde{\widetilde{P}}$.
   (d) Trouver une relation entre $\widetilde{P}^{-1}$ et $\widetilde{P^{-1}}$.
2. Soient A et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \times \widetilde{A}$.
   (b) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\widetilde{B} = P^{-1}\widetilde{A}P$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A est diagonalisable alors $\widetilde{A}$ est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?

Planche 56
On considère E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$. Soient a et b deux vecteurs normés de E formant une famille libre. On définit f qui à x associe $\langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.
2. Déterminer le noyau f.
3. Déterminer les éléments propres de f.

Planche 57
Soit E un espace vectoriel et p, q des projecteurs.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $pq = qp = 0$.
2. Dans ce cas, montrer que $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$ et $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Planche 58
Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $f \in E$. Soit $g : x \mapsto \int_0^1 \inf(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ définie sur [0;1].

1. Montrer que g est continue. On pourra visualiser $t \mapsto \inf(x, t)$ sur $[0; 1]$ pour déduire une nouvelle expression de g.
2. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$. Exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in [0; 1]$.

   On pose :
   $$u : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 \inf(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t\right)$$
   définie de E dans E.
3. (a) Montrer que u est linéaire.
   (b) Montrer que u est injective.
   (c) Est-elle surjective ?
4. Donner les vecteurs propres et valeurs propres de u.

Planche 59
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ une fonction non constante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette fonction vérifie $\forall\ (A, B) \in M_n(\mathbb{C}),\ f(AB)\ = f(A)f(B)$.

1. (a) Calculer $f(I_n)$
   (b) Calculer $f(0)$.
2. Montrer que A inversible $\Rightarrow f(A) \neq 0$.
3. Montrer que si $A\ et\ B$ sont semblables alors $f(A) = f(B)$
4. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant r \leqslant n - 1$. On suppose A de rang r.
   (a) Montrer que si $f(A) \neq 0$ alors $f(B) \neq 0$ pour toute matrice B telle que $\mathrm{rg}(B) = r$.
   (b) Montrer que si $f(A) \neq 0$ alors $f(B) \neq 0$ pour toute matrice B telle que $1 \leq \mathrm{rg}(B) \leqslant r$.
5. Prouver la réciproque de la question 2.

Planche 60
Résoudre, à l'aide de matrices, le système différentiel suivant : (réduction)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 4x+6y \\ y' & = & -3x-6y \\ z' & = & -3x-6y-5z \end{array}\right.$$

Planche 61
Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On note $\|.\|$ la norme associée. On dit qu'une suite (x_n) converge fortement vers x si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ et (x_n) converge faiblement vers x si $\forall y \in E,\ \lim_{n\to\infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$

1. (a) Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
   (b) Montrer que convergence forte implique convergence faible
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers $x \iff (x_n)$ converge faiblement vers x et $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$
3. Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Planche 62
Soit σ une permutation aléatoire de $[\![1,n]\!]$. On note X_k la variable aléatoire valant 1 si $\sigma(k) = k$ et 0 sinon. On note N le nombre de points fixes de σ.

1. (a) Que peut-on dire des X_k ?
   (b) Déterminer espérance et variance de X_k.
   (c) Calculer $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$.
2. (a) Lier N et les X_k.
   (b) Calculer espérance et variance de N.

Planche 63

1. Montrer que $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est orthogonale. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que A est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que 2 des 3 assertions suivantes impliquent la troisième :
   (i) $f^2 = -\mathrm{Id}$; (ii) f est une isométrie ; (iii) $\forall x \in E, (x|f(x)) = 0$.

Planche 64

1. Donner l'expression de la dérivée de $f\ :\ x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0,\infty[\ :\ x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0$.
3. Déterminer les solutions développables en série entière sur $]-2,2[$.
4. Résoudre (E) sur $[0,+\infty[$.